Übungen zum Aufbaukurs Mathemagie

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung Mathematik

Universität Passau, 5.7.2022

Inhaltsübersicht

Mathemagier: Glasini

a.k.a. StD Helmut Glas (ASG Passau)

1. Kopfrechnen

Meine Zaubertricks kann jedes zehnjährige Kind
mit 15 Jahren Erfahrung.
(nach Harry Blackstone Jr.)

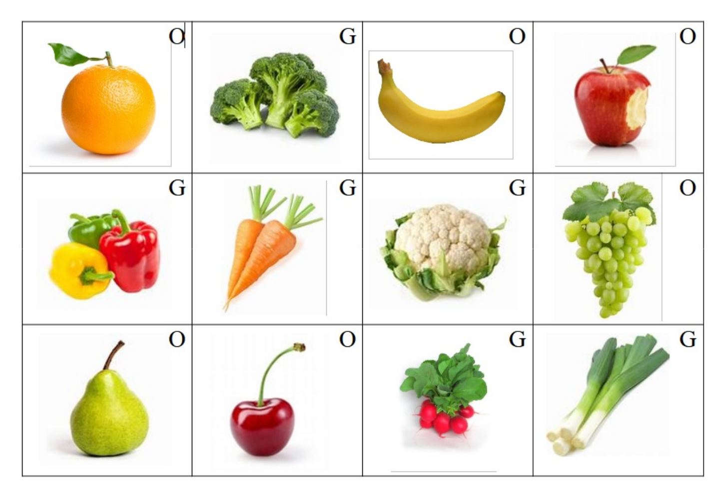
Obst und Gemüse

(1) Jeder Zuschauer wählt ein beliebiges Obst aus.

(2) Dann werden die Anweisungen des Mathemagiers befolgt.

(3) Durch telepathische Beeinflussung schafft es der Mathemagier, dass alle Zuschauer beim gleichen Obst landen!

Diesen Trick können also nicht nur die Ehrlich Brothers!



Start bei **O** - horiz. zu **G** - vert. zu **O** - diagonal zu **G** - horiz. zu **O**

Auflösung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a3} & \mathbf{b3} & \mathbf{c3} & \mathbf{d3} \\ \mathbf{a2} & \mathbf{b2} & \mathbf{c2} & \mathbf{d2} \\ \mathbf{a1} & \mathbf{b1} & \mathbf{c1} & \mathbf{d1} \end{bmatrix}$$

(1) Nach dem ersten Schritt sind alle bei **b3**, **c2** oder **c1**.

(2) Nach dem zweiten Schritt sind alle bei **b1** oder **c3**.

(3) Nach dem dritten Schritt sind alle bei **a2** oder **b2** oder **c2**.

(4) Nach dem vierten Schritt sind alle bei **d2 (Weintrauben)**.

Die Kartensuche

(1) Die Zuschauer wählen drei Karten aus einem 52er Blatt. Der Mathemagier macht Stapel **(I)** von 10, **(II)** von 15, **(III)** von 15 und **(IV)** von 9 Karten.

(2) Die 1. gewählte Karte kommt auf **(I)**, darauf ein Teil von **(II)**.

(3) Die 2. gewählte Karte kommt auf den Rest von **(II)** und darauf ein Teil von **(III)**.

(4) Die 3. gewählte Karte kommt auf den Rest von **(III)**, darauf **(IV)**.

(5) Jetzt kommt **(III)** auf **(II)**, das Ergebnis auf **(I)** und es werden 4 Karten nach unten gebracht.

(6) Nach mehrfachem **auf - zu** Auszählen bleiben genau die drei Zuschauerkarten übrig!

Auflösung

(1) Nach den Schritten (1) - (5) sind die gewählten Karten die Nummern 15, 31 und 47 von unten, also 6, 22 und 38 von oben.

(2) Da alle Zahlen gerade sind, landen die drei Karten auf dem verdeckten 26er Stapel, und zwar mit den Nummern 3, 11, 19 von unten, d.h. also 8, 16, 24 von oben.

(3) Nach der zweiten Auszählrunde haben wir im 13er Stapel die Nummern 4, 8, 12 von unten, also 2, 6, 10 von oben.

(4) Nach der dritten Auszählrunde haben wir im Sechserstapel die Nummern 1, 3, 5 von unten, also 2, 4, 6 von oben.

(5) Am Ende bleiben genau die Nummern 1, 2, 3 im verdeckten Dreierstapel!

2. Modulorechnung

There was a lot more to magic, as Harry quickly found out, than waving your wand and saying a few funny words.

(J. K. Rowling)

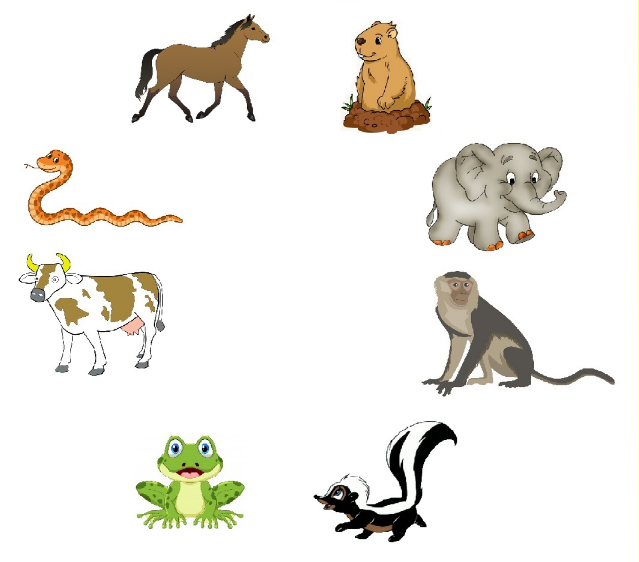
Der Tierkreis

(1) Ein Zuschauer nennt den Vornamen und wählt ein Lieblingstier.

(2) Der Mathemagier deutet auf ein Anfangstier und geht dann immer um drei Tiere weiter.

(3) Zuerst wird das Lieblingstier genannt und buchstabiert. Dann wird auch noch der Vorname buchstabiert.

(4) Am Ende deutet der Mathemagier genau auf das Lieblingstier!



Auflösung

(1) Die Tiernamen haben modulo 8 genau 0, 1, ..., 7 Buchstaben.

	5	**2**	
0			**7**
3			**4**
	6	**1**	

(2) Die Zahlen 0, 1, ..., 7 sind in Dreierabständen angeordnet. Wegen $\mathrm{ggT}(3,8) = 1$ geht dies genau auf.

(3) Beginnt man bei **0 (Schlange)** und buchstabiert man ein Tier in Dreierschritten, so endet man genau bei diesem Tier.

(4) Der Mathemagier beginnt daher bei $-n \pmod 8$ wobei n die Länge des Vornamens ist.

3. Zahlensystemumrechnung

Vergiss nie die vier magischen Worte:

„Du hast recht, Schatz!“

(sicherheitshalber anonym)

Sherlock Holmes findet den Dieb

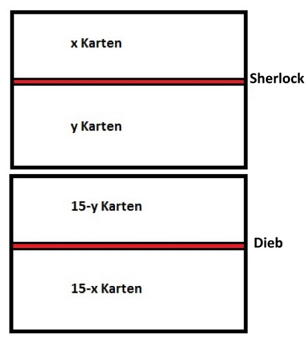
(1) Der Mathemagier führt den Trick vor. **Sherlock Holmes** und der **Dieb** werden auf verschieden große Stapel gelegt.

(2) Beim Auszählen wird immer der Stapel weiter verwendet, in dem sich **Sherlock Holmes** befindet.

(3) Am Ende bleibt genau ein Paar bestehend aus **Sherlock Holmes** und dem **Dieb** übrig.

Auflösung

(1) Durch die Anleitung entstehen die folgenden beiden Stapel:



(2) Also kommt **Sherlock Holmes** immer genau 16 Karten vor oder nach dem **Dieb**.

(3) Wenn die Binärdarstellung der Kartennummer des **Sherlock** bzw. **Diebs** in der oberen Hälfte gegeben ist durch

$$(0, a_3, a_2, a_1, a_0),$$

dann ist die Binärdarstellung der Kartennummer des Partners in der unteren Hälfte gerade

$$(1, a_3, a_2, a_1, a_0).$$

(4) Durch das Auszählen werden erst die Karten mit dem richtigen Zweierrest a_0 behalten.

(5) Dann werden die Karten mit dem richtigen Viererrest $2a_1 + a_0$ gefunden, u.s.w. bis nur die beiden Karten mit dem richtigen 16-er Rest $8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$ übrig bleiben.

4. Geometrische Berechnungen

Der Zauberer wusste nicht, dass es unmöglich ist, also hat er es einfach gemacht.

Geometrisches Dreierlei

(1) Auf dem Tisch liegen drei Karten mit einem Kreis, einem Viereck und einem Stern. Ein Zuschauer merkt sich insgeheim ein Symbol.

(2) Die Karten werden umgedreht. Während der Mathemagier wegschaut, soll der Zuschauer die nicht gemerkten Karten vertauschen.

(3) Während der Mathemagier nun wieder zuschaut, darf der Zuschauer die Karten paarweise beliebig vertauschen.

(4) Die Karten werden umgedreht und der Mathemagier nennt die gemerkte Karte.

Auflösung

(1) Der Mathemagier merkt sich die mittlere Karte, z.B. den **Kreis**.

(2) Bei den Vertauschungen folgt der Mathemagier der mittleren Karte. Ist sie am Ende der **Kreis**, so hatte der Zuschauer den **Kreis** gewählt und die äußeren beiden Karten vertauscht.

(3) Ist die verfolgte Karte das **Viereck**, so hatte sich der Zuschauer den **Stern** gemerkt. Ist sie der **Stern**, so hatte sich der Zuschauer das **Viereck** gemerkt. In beiden Fällen wurde nämlich der Kreis mit der anderen nicht gemerkten Karte getauscht, d.h. die andere nicht gemerkte Karte landete in der Mitte.

5. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Magie ist die Kunst,
Aberglauben in Geld zu verwandeln.
(Ambrose Gwinnett Bierce)

Die Superwürfel

(1) Auf dem Tisch liegen vier Würfel mit seltsamen Augenzahlen und Augensummen 16, 18, 18, 20.

(2) Erst wählt der Zuschauer einen Würfel, dann der Mathemagier.

(3) Nun wird 10 Runden lang gewürfelt. Wer die höhere Augenzahl hat, erhält einen Punkt.

(4) Am Ende hat der Mathemagier mehr Punkte und gewinnt!

Auflösung

(1) Die Augenzahlen der vier Würfel lauten wie folgt:

A: 0, 0, 4, 4, 4, 4. **B**: 1, 1, 1, 5, 5, 5.

C: 2, 2, 2, 2, 6, 6. **D**: 3, 3, 3, 3, 3, 3.

(2) Abhängig von der Wahl des **Z**uschauers, nimmt der **M**athemagier folgenden Würfel und erzielt eine Gewinnwahrscheinlichkeit von $2/3$ pro Runde:

Z	**A**	**B**	**C**	**D**
M	**B**	**C**	**D**	**A**

(3) Prüfen wir z.B. nach dass Würfel **B** gegen **A** mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ gewinnt: zeigt **A** die 0, so verliert er sicher, zeigt **A** die 4, so verliert er mit Wahrscheinlichkeit $1/2$. Insgesamt verliert **A** mit Wahrscheinlichkeit $1/3 + (2/3) \cdot (1/2) = 2/3$.

(4) Ebenso prüft man leicht nach, dass die anderen Würfel sich wie angegeben reihum mit Wahrscheinlichkeit 2/3 besiegen.

(5) Insgesamt gewinnt der Mathemagier mit der Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{i=6}^{10} \binom{10}{i} (2/3)^i \, (1/3)^{10-i} \approx 78,6\%$$

und die Wahrscheinlichkeit eines Unentschieden ist

$$\binom{10}{5} (2/3)^5 \, (1/3)^5 \approx 13,7\%.$$

6. Geheimcodeberechnungen

Heute war 20 Minuten lang das WLAN unterbrochen.
Da musste ich mich mit meiner Familie unterhalten.
Es scheinen ganz nette Menschen zu sein.

Der WLAN Kartencomputer

(1) Ein Kandidat hebt bei einem gemischten Skatblatt ab und nimmt sich die oberste Karte **K**.

(2) Der mathemagische Assistent verteilt die nächsten fünf Karten an Zuschauer in der ersten Reihe. Diejenigen, die eine rote Karte erhalten haben, melden sich.

(3) Der Mathemagier **berechnet** die geheime Karte **K**!

Auflösung

(1) Die Karten waren nicht zufällig gereiht, sondern gemäß der **de-Bruijn-Folge** **0000 0100 1011 0011 1110 0011 0111 0101**. Jedes mögliche Bittupel der Länge 5 kommt genau einmal vor, wenn man die Folge zyklisch betrachtet.

(2) Jede Karte wird durch genau ein 5-bit Tupel kodiert:
Ziffer 1,2: **00** = Kreuz, **01** = Pik, **10** = Herz, **11** = Karo
Ziffern 3,4,5: **000** = 7, **001** = 8, **010** = 9, **011** = 10,
100 = B, **101** = D, **110** = K, **111** = A.

(3) Zu jedem 5-bit Tupel $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ kann man das nachfolgende Bit berechnen durch $a_6 = a_1 + a_3 \pmod 2$ und das vorhergehende Bit ist gegeben als $a_0 = a_2 + a_5 \pmod 2$.

(4) Bei dieser Kodierung gilt also $\mathbf{0}$ = **schwarz** und $\mathbf{1}$ = **rot**. Der Mathemagier wird aus dem beobachteten 5-bit Tupel $(a_1, \ldots, a_5)$ also erst einmal a_0 berechnen.

(5) Aus dem 5-bit Tupel $(a_0, \ldots, a_4)$ ergibt sich dann die gesuchte Karte, und zwar (a_0, a_1) = Farbe, (a_2, a_3, a_4) = Wert.

(6) Falls gewünscht, kann der Mathemagier auch a_6, a_7, a_8, a_9 berechnen und damit die fünf ausgeteilten Karten.

THE END

Ja, ich kann zaubern!

Ich kann Essen in meinem Mund verschwinden
und auf meinen Hüften wieder auftauchen lassen!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!