Die Mathematik des Zauberwürfels

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung Mathematik

Universität Passau, 14.12.2022

Inhaltsübersicht

1. Eine kurze Geschichte des Zauberwürfels

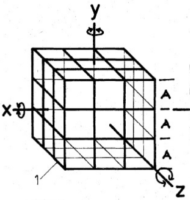
Es gibt ein altes Sprichwort über die,
die die Geschichte vergessen.
Ich erinnere mich nicht daran, aber es ist sehr gut.
(Autor nicht mehr bekannt)

1974 Ernő Rubik, ein ungarischer Professor der Innenarchitektur, erfindet seinen **Zauberwürfel**, um seinen Studenten zu helfen ihr räumliches Denken zu schulen.

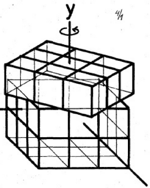
1975 Der Erfinder registriert sein ungarisches Patent **HU170062**, welches 1977 erteilt wird.


170062
Nemzetközi osztályozás:
A 63 F 9/12

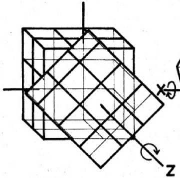
4/1



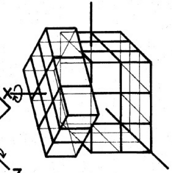
1. ÁBRA



2. ÁBRA



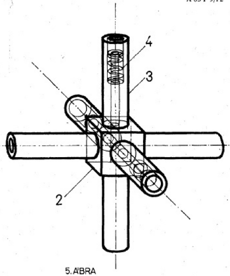
3. ÁBRA



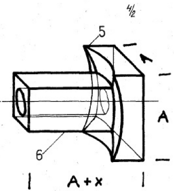
4. ÁBRA

170062
Nemzetközi osztályozás:
A 63 F 9/12

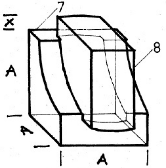
4/2



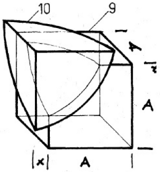
5. ÁBRA



6. ÁBRA



7. ÁBRA



8. ÁBRA

1977 Die ungarische Firma **Politechnika** (später in **Politoys** umbenannt) produziert 5000 Zauberwürfel. Sie verkaufen sich aber nur schleppend.

1978-1980 Die Firmen **Pentangle (GB)** und **Ideal Toys (USA)** übernehmen den internationalen Vertrieb und bestellen 500.000 Zauberwürfel. Aus Marketinggründen wird er in **Rubik's Cube** umbenannt.

1980 Der Zauberwürfel wird bei internationalen Spielwarenmessen vorgestellt und in Deutschland zum **Spiel des Jahres** gewählt. Innerhalb eines Jahres werden **100 Millionen Zauberwürfel** verkauft.

Der Zauberwürfel heutzutage

2020 Der Zauberwürfel stellt einen neuen Verkaufsrekord seit der Manie der 1980er Jahre auf. Weltweit wird 270 Millionen Euro Umsatz gemacht, was einer Steigerung um 60 Prozent gegenüber 2016 entspricht.

2021 Insgesamt sind weltweit über 470 Millionen Exemplare verkauft worden. Der Zauberwürfel ist damit das meistverkaufte Spielzeug aller Zeiten.

6. Mai 2018 **Feliks Zemdegs** (Australien) stellt einen neuen Speedcubing Weltrekord von **4.22 Sekunden** auf.

24. Nov. 2018 **Yusheng Du** (China) verbessert den Speedcubing Weltrekord auf **3.47 Sekunden**.

2. Permutationspuzzle

Ich frage mich, was unsere Eltern gemacht haben bevor es das Internet gab.
Ich habe meine 17 Geschwister gefragt, aber die wissen es auch nicht.

Eine Umordnung von n Elementen nennt man eine **Permutation**. Oft ordnet man das Zahlentupel $(1, 2, \ldots, n)$ um.
Mathematisch gesehen ist eine Umordnung eine **bijektive Abbildung** $\varphi : \ \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. Man schreibt sie auch in der Form $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix}$.

Beispiele für Permutationen

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ Identität, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ Transposition

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$ n-Zykel

Sätze über Permutationen

(a) Die Menge S_n aller Permutationen von $(1, \ldots, n)$ heißt die **symmetrische Gruppe** der Ordnung n und hat $n!$ Elemente.

(b) Jede Permutation ist (in nicht eindeutiger Weise) ein Produkt von Transpositionen.

(c) Jede Permutation ist (in bis auf die Reihenfolge eindeutiger Weise) ein Produkt disjunkter Zykel.

Gruppen

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $\circ : \; G \times G \longrightarrow G$ heißt eine **Gruppe**, wenn gilt:

(1) (Assoziativgesetz) Für $a, b, c \in G$ gilt $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

(2) (Neutrales Element) Es gibt ein $e \in G$ mit $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in G$.

(3) (Inverse Elemente) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Beispiele: **(a)** $\mathbb{Z}$ ist bzgl. $+$ eine Gruppe.

(b) Für $n > 1$ sind die **modularen Zahlen** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$ bzgl. $+$ eine Gruppe.

(c) S_n ist bzgl. der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

Permutationspuzzles

Ein Puzzlespiel heißt ein **Permutationspuzzle**, wenn gilt:

(1) Jede Bewegung des Puzzles bewirkt eine Permutation in S_n gewisser Teile des Puzzles.

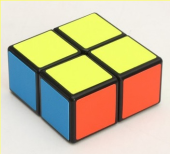
(2) Ist eine Permutation das Ergebnis verschiedener Bewegungen, so sind die resultierenden Positionen des Puzzles nicht unterscheidbar.

(3) Jede Bewegung b des Puzzles ist umkehrbar, d.h. es existiert eine inverse Bewegung b^{-1}.

(4) Sind b_1 und b_2 Bewegungen, so kann man sie hintereinander ausführen und erhält ein Produkt $b_2 \circ b_1$ (sprich b_2 **nach** b_1). Dieses gehört zum Produkt der Permutationen.

Folgerung: Die Bewegungen eines Permutationspuzzles liefern eine **Untergruppe** einer symmetrischen Gruppe S_n.

Beispiel: Gegeben sei der $1 \times 2 \times 2$ Zauberwürfel.



Das Puzzle werde stets so orientiert, dass eine Ecke fest ist.
Bei den anderen drei Würfelchen ist die Orientierung durch die Position bereits eindeutig bestimmt.
Seien $\{1, 2, 3\}$ diese Positionen. Der gelöste Zustand ist also $(1, 2, 3)$.
Als Gruppe der möglichen Permutationen des Puzzles erhalten wir

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. Die Zauberwürfelgruppe

Wann bekomme ich eingentlich die ganzen Cookies, die ich ständig akzeptiere?

Als Erstes führen wir Bezeichnungen für die grundlegenden Bewegungen des 3x3x3 Zauberwürfels ein:

R drehe die **Rechte** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

L drehe die **Linke** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

F drehe die **Front** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

B drehe die **Back** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

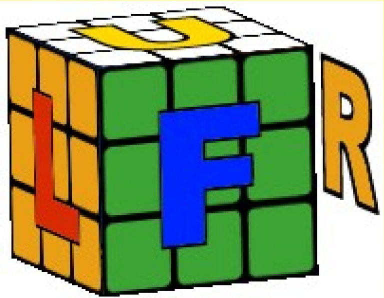
U drehe die **Up** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

D drehe die **Down** Seite im Uhrzeigersinn um 90^o

Weitere Bewegungen

R', L', F', B', U', D' entsprechende Drehungen um 90^o im Gegenuhrzeigersinn, also $R' = R^{-1}$ etc.

R^2, L^2, F^2, B^2, U^2, D^2 entsprechende Drehungen um 180^o



Noch mehr Zauberwürfel-Terminologie

Außen herum hat der Zauberwürfel 26 Würfelchen (engl. **cubies**).

Ihre Außenseiten sind mit 54 **Stickern** in 6 Farben beklebt.

Am Anfang wird der Würfel durch eine Folge zufällig gewählter Bewegungen verdreht (engl. **scramble**). Ziel ist, den Originalzustand wieder herzustellen, in dem die Sticker jeder Seite gleichfarbig sind.

Dazu verwendet man bestimmte **Zugfolgen**, die bestimmte Teilziele erreichen, z.B. bestimmte Ecken oder Kanten korrekt positionieren.

Eine Zugfolge wird rückgängig gemacht indem man die inversen Bewegungen in umgekehrter Reihenfolge ausführt: $(RUF)^{-1} = F'U'R'$.

Achtung: Bei dieser Notation schreibt man die Drehungen in der Reihenfolge hin, in der man sie ausführt.

Die Zauberwürfelgruppe

Indem man die Seitenmitten im Raum fest positioniert, kann man die Wirkung der Bewegungen des Zauberwürfels als Permutationen der 48 Sticker der Ecken und Kanten interpretieren.

Die Zauberwürfelgruppe Z ist damit eine Untergruppe von S_{48}. Sie hat

$$\mathbf{43,252,003,274,489,856,000} \quad \text{Elemente!}$$

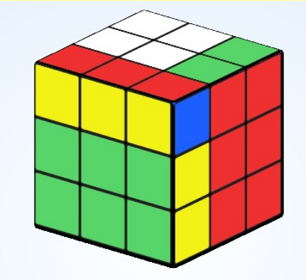
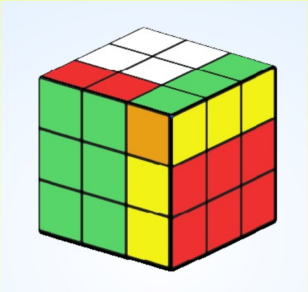
Die Gruppe Z wird von den Permutationen **erzeugt**, die zu den Drehungen **R, L, F, B, U, D** gehören, d.h. jede Permutation kommt von einem Produkt dieser Drehungen und ihrer Inversen.

Die Identität **I** ist das neutrale Element von Z.

Die Drehungen erfüllen gewisse **Relationen**, z.B. $\mathbf{R}^4 = \mathbf{I}$.

Der Kommutator

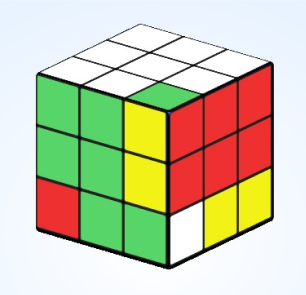
Vergleichen wir nun die Ergebnisse der Zugfolgen **R F'** und **F' R**:

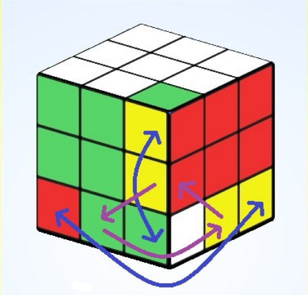
 

Sie sind verschieden! Die Reihenfolge der Drehungen spielt also eine Rolle, d.h. die Gruppe Z ist **nicht kommutativ**.

Im Gegensatz dazu sind $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ kommutativ.

Betrachte nun die Zugfolge **C = R F' R' F** (**raus, raus, rein, rein**). Sie heißt ein **Kommutator**. Was hat sie mit den Würfelchen gemacht?





Der Kommutator C hat die **Ordnung** 6, d.h. es gilt $\mathbf{C}^{6} = \mathbf{I}$.

4. Ein Slowcubing Tutorium

Schau! Ich habe dieses Puzzle in 4 Stunden gelöst!

Na und?

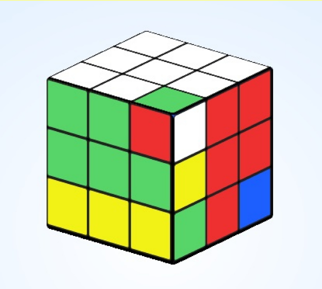
Auf der Schachtel steht 3-6 Jahre!

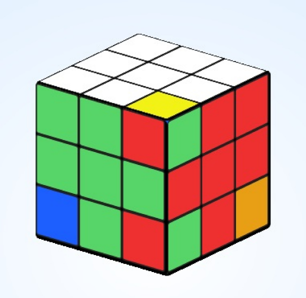
Schätzungsweise schaffen es etwa 5.8% der Weltbevölkerung, den Zauberwürfel zu lösen.

Ziel: Finde einen Lösungsweg, der nur eine Sorte Zugfolge verwendet, nämlich Kommutatoren wie **C = R F' R' F**.

Beachte: Die inverse Zugfolge zu **C** ist **C' = F' R F R'**, also wieder **raus, raus, rein, rein**, aber diesmal starten wir mit **F'**.

Wenn wir die Wirkung des Kommutators **C** betrachten, liegt es nahe zu prüfen, was $\mathbf{C}^2$ und $\mathbf{C}^3$ tun.



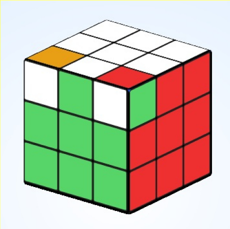


Hier ist $\mathbf{C}^2$ ein **3-Zykel** von Kanten zusammen mit Eckendrehungen und $\mathbf{C}^3$ ist eine **Doppeltransposition** von Ecken.

Idee: Diese Operationen genügen bereits, um den Zauberwürfel zu lösen!

Erste Anwendungen des Kommutators

Angenommen, wir wollen folgende Stellung lösen:



(1) Wende $\mathbf{C^2}$ an um die **FRU** Ecke um 120^o zu drehen.

(2) Verwende den **Vorbereitungszug** **U'**.

(3) Mittels $(\mathbf{C}')^{\mathbf{2}}$ drehe die **FRU** Ecke um -120^o.

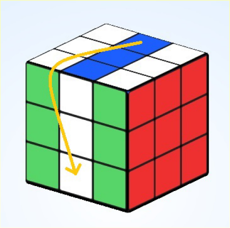
(4) Mache den Vorbereitungszug mit **U** rückgängig.

Weitere Anwendungen des Kommutators

(1) Mit Hilfe von **C^3** können wir die Ecken positionieren. Ein 3-Zykel von Ecken der obersten Schicht ist gegeben durch **C^3 U' C^3 U**.

(2) Mit **C^2** können wir die Kanten positionieren.

(3) Ein weiterer nützlicher 3-Zykel von Kanten ist der Kommutator **M D^2 M' D^2**, wobei M eine 90^o Drehung des **Mittelbands** bezeichnet.



(4) Schließlich prüfe nach, was $\mathbf{C}^2$ mit der Orientierung der Kanten macht. Drehe den Würfel um 120^o um die Raumdiagonale und führe die inverse Zugfolge $(\mathbf{C}')^2$ aus.

Bemerkungen: (a) Alle Produkte von Kommutatoren bilden eine Untergruppe der Zauberwürfelgruppe. Sie heißt die **Kommutatorgruppe** von Z und enthält genau die Hälfte der Elemente von Z.

(b) Ist $\mathbf{A}$ eine Zugfolge und $\mathbf{B}$ eine Folge von Vorbereitungszügen, so heißt $\mathbf{B}\ \mathbf{A}\ \mathbf{B}^{-1}$ die **Konjugation** von $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{B}$.

Die Konjugation hat viele gute Eigenschaften: die Konjugation eines Produkts ist ein Produkt von Konjugationen, die Konjugation eines Kommutators ist ein Kommutator, etc.

5. Gotteszahl und Gottesalgorithmus

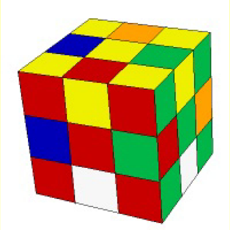
Mathelehrer: Was ist die Hälfte von 637 Kilo?
Schüler: 637 Pfund.

Für jede Stellung des Zauberwürfels suchen wir die **kürzeste** Zugfolge, die sie löst. Die **maximale** Länge eines solchen kürzesten Lösungswegs heißt die **Gotteszahl** des Zauberwürfels. Sie hängt natürlich davon ab, wie wir die Züge zählen.

Definition. Zählt man **R**, **R'**, $\mathbf{R^2}$, etc., als jeweils einen Zug, so erhält man die **Seitendrehungsmetrik**.

Die Gotteszahl in der Seitendrehungsmetrik

Im Jahr **2010** wurde bewiesen, dass die Gotteszahl in der Seitendrehungsmetrik gleich **20** ist. Eine Position, die nachweisbar 20 Drehungen braucht, ist der **Superflip**.



Eine kürzeste Lösung des Superflips ist
U R^2 F B R B^2 R U^2 L B^2 R U' D' R^2 F R' L B^2 U^2 F^2.

Die Gotteszahl in der Vierteldrehungsmetrik

Zählt man **R** und **R'** als **einen** Zug sowie $\mathbf{R^2}$ als **zwei** Züge und verfährt man ebenso mit den anderen Seiten, so ergibt sich die **Vierteldrehungsmetrik**.

2014 wurde von **Tomas Rokicki** und **Morley Davidson** gezeigt, dass die Gotteszahl in der Vierteldrehungsmetrik **26** ist. Sie brauchten dafür **29 CPU Jahre** und mussten **55,882,296 Stellungen** lösen.

Eine der Stellungen, die nachweislich 26 Vierteldrehungen benötigt, ist der **Superflip mit Vierpunkt**.

Der Superflip mit Vierpunkt

Eine kürzeste Lösung des Superflip mit Vierpunkt ist
U U F U U   R' L F F U   F' B' R L U   U R U D' R L' D R' L' D D.

Die Hilbert-Dehn Funktion

Für jedes $i \geq 0$ sei $\mathrm{HD}_Z(i)$ die Zahl der Stellungen des Zauberwürfels, deren kürzeste Lösung i Vierteldrehungen erfordert. Die Abbildung HD_Z heißt die **Hilbert-Dehn Funktion** von Z.

Einige Werte der Hilbert-Dehn Funktion von Z sind:

$\mathrm{HD}_Z(1) = 12$	$\mathrm{HD}_Z(7) = 8,221,632$	$\mathrm{HD}_Z(13) = 5,442,351,625,028$
$\mathrm{HD}_Z(2) = 114$	$\mathrm{HD}_Z(8) = 76,843,595$	$\mathrm{HD}_Z(14) = 50,729,620,202,582$
$\mathrm{HD}_Z(3) = 1,068$	$\mathrm{HD}_Z(9) = 717,789,576$	$\mathrm{HD}_Z(15) = 472,495,678,811,004$
$\mathrm{HD}_Z(4) = 10,011$	$\mathrm{HD}_Z(10) = 6,701,836,858$	$\mathrm{HD}_Z(16) = 4,393,570,406,220,123$
$\mathrm{HD}_Z(5) = 93,840$	$\mathrm{HD}_Z(11) = 62,549,615,248$	$\mathrm{HD}_Z(17) = 40,648,181,519,827,392$
$\mathrm{HD}_Z(6) = 878,880$	$\mathrm{HD}_Z(12) = 583,570,100,997$	$\mathrm{HD}_Z(18) = 368,071,526,203,620,348$

Die Werte $\mathrm{HD}_Z(19), \ldots, \mathrm{HD}_Z(26)$ sind unbekannt.

Der Gottesalgorithmus

Ziel: Zu jeder Stellung des Zauberwürfels soll eine kürzeste Folge von Drehungen berechnet werden, die sie löst, d.h., die sie in die Ausgangsstellung überführt.

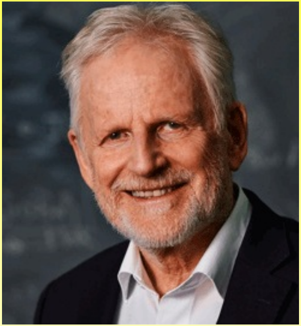
Da angenommen wird, dass ein solcher Algorithmus für Menschen unmöglich zu finden ist, heißt er ein **Gottesalgorithmus**.

Mithilfe der **Computeralgebra** und des nicht-kommutativen **Buchberger-Algorithmus** können wir jedoch einen solchen Algorithmus angeben!

Grundlegende Algorithmen der Algebra

Euklid

C.F. Gauß



B. Buchberger

Buchbergers Algorithmus

Eine Folge von Drehungen, die den Zauberwürfel unverändert lässt, heißt eine **Relation**.

Theorem. Startend mit den **definierenden Relationen** der Zauberwürfelgruppe Z berechnet **Buchbergers Algorithmus** eine Menge von Relationen R mit der folgenden Eigenschaft:

Ist eine Zugfolge F gegeben, die die Verdrehung des Zauberwürfels repräsentiert, so kann man mittels R die Zugfolge F so verändern, dass sich der kürzeste Lösungsweg der Stellung ergibt.

Eine Menge von Relationen R mit dieser Eigenschaft heißt eine **Gröbner-Basis** des 2-seitigen Ideals aller Relationen von Z.

6. Schiebepuzzles

Die ersten fünf Tage
nach dem Wochenende
sind immer die schlimmsten.

Ein **Schiebepuzzle** ist eine spezielle Art von **Permutationspuzzle**, bei dem ein oder mehrere Felder bzw. Positionen unbesetzt sind. Das berühmteste ist das 1879 erfundene **15-Puzzle**.

Aufgabe: Durch Verschieben der Puzzleteile bringe die Zahlen 14 und 15 in die richtige Reihenfolge!

Auf Grund eines ausgesetzten Preisgelds von **1000 $** führte diese Aufgabe zur ersten weltweiten **Puzzlemanie** im Jahr 1880.

Unmöglichkeitsbeweis: (1) Jede Folge von Zügen, an deren Anfang und Ende das leere Feld rechts unten ist, stellt eine **Permutation** der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 15$ dar.

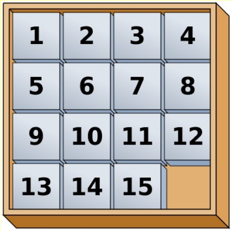
(2) Jede solche Folge von Zügen besteht aus einer **geraden** Anzahl von Zügen. Wenn man nämlich das 4×4 Feld wie ein Schachbrett färbt, wechselt das leere Feld bei jedem Zug die Farbe.

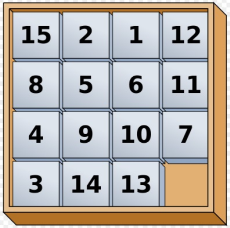
(3) Ist **16** das leere Feld, so ist jeder Zug eine **Transposition**.

(4) Jede Zugfolge, die **16** fest lässt, besteht aus einer geraden Anzahl von Transpositionen, ist also eine **gerade Permutation**.

(5) Die gesuchte Lösung, also die Vertauschung $14 \leftrightarrow 15$ ist eine **ungerade Permutation**. Also ist die Aufgabe **nicht lösbar**.

Das moderne 15-Puzzle



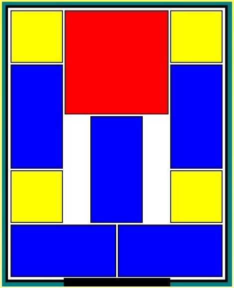


Aufgabe: Ausgehend von der gelösten Stellung führe eine (längere) zufällige Folge von Zügen durch (engl. **scramble**).
Dann finde eine Folge von Zügen, die das Puzzle wieder in die gelöste Stellung überführt.

Satz: Eine Stellung, bei der sich das leere Feld rechts unten befindet, ist genau dann aus der gelösten Stellung erreichbar, wenn sie eine **gerade** Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, 15$ darstellt.

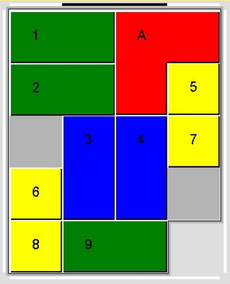
Beweisidee: Wir müssen nur noch zeigen, dass die geraden Permutationen auch wirklich möglich sind. Verwende dazu, dass die Gruppe aller geraden Permutationen (**alternierende Gruppe**) von den 3-Zykeln erzeugt wird. Finde eine Folge von Zügen, die den 3-Zykel (123) bewirkt.

Andere Schiebepuzzles



Century

(100 Züge)



Super Dries

(321 Züge)

Algorithmische Lösung von Schiebepuzzles

(1) Betrachte den **Graph**, dessen Ecken die Stellungen und dessen Kanten die Züge des Puzzles sind.

(2) Dies ist ein **ungerichteter Graph**, da zu jedem Zug auch der Umkehrzug erlaubt ist.

(3) Der **Abstand** zweier Stellungen A, B sei die kürzeste Länge einer Zugfolge, die A in B überführt.

(4) Hat Stellung B von A den Abstand d und macht man einen Zug, so hat die resultierende Stellung den Abstand $d-1$ oder d oder $d+1$ von A.

Algorithmus: **(Berechnung des Abstands von A und B)**

(1) Starte mit $d = 0$ und $L_0 = \{A\}$.

(2) Führe den folgenden Schritt für alle Stellungen S in L_d durch. Erhöhe dann d um eins und wiederhole **(2)**.

(3) Berechne alle Stellungen, die von S aus in einem Zug erreichbar sind. Ist B dabei, so gib $d + 1$ aus und stoppe. Ansonsten füge alle Nachfolgestellungen von S, die nicht in L_{d-1} oder L_d sind, zu L_{d+1} hinzu.

Bemerkung: Man muss immer nur die aktuellen Listen L_{d-1}, L_d und L_{d+1} speichern.
Durch Wiederholungen des Algorithmus kann man einen kürzesten Weg von A nach B finden.

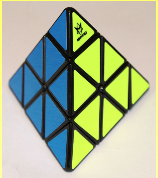
7. Weitere Permutationspuzzles

Ansichtssache:
Der frühe Vogel fängt den Wurm.
Der frühe Wurm wird vom Vogel gefressen.

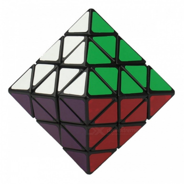
In den letzten Jahrzehnten sind neben dem Zauberwürfel viele weitere **Drehpuzzles** erfunden worden. Mathematisch gesehen handelt es sich um Permutationspuzzles, bei denen eine Gruppe von Drehungen auf den Bestandteilen des Puzzles (**cubies**, **stickers**) operiert.

Neben den Drehpuzzles gibt es noch weitere Arten von Permutationspuzzles, die wir hier aber nicht weiter betrachten.

Andere platonische Körper



Pyraminx



Oktaeder

Megaminx

Ikosaeder

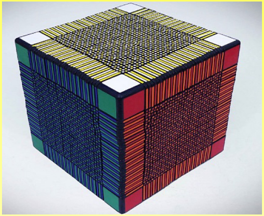
Zauberwürfel höherer Ordnung

4x4x4

Rubiks Rache

17x17x17

Over the Top



Gregs 33x33x33

WR: Grégoire Pfennig

Andere Formen von Zauberwürfeln

Kugel

Masterball

Zylinder

Pentabarrel

Prisma

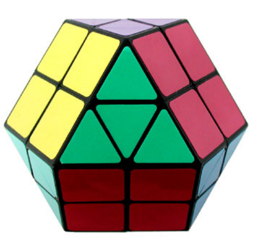
Jumble Star

Archimedische Körper

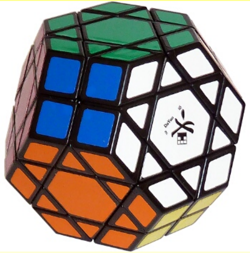
Ein **archimedischer Körper** hat als Seitenflächen regelmäßige Vielecke, hat uniforme Ecken und ist weder platonischer Körper noch Prisma oder Antiprisma.

Es gibt **13** solche Körper (mit Orientierung **15**), die von **Archimedes (287-212 v.Chr.)** klassifiziert wurden.

Tetraederstumpf



Kuboktaeder



Oktaederstumpf

Weitere Drehpuzzles haben die Formen von **Johnson-Körpern**, von **Catalanischen Körpern** oder sind ganz unregelmäßig.

Es gibt auch spezielle Mechanismen und Einschränkungen wie **Getriebewürfel**, **bandagierte Würfel**, **Formwechselwürfel**, u.v.a.m.

Über 10600 verschiedene Typen sind im **Drehpuzzlemuseum**

`www.twistypuzzles.com`

Viele von ihnen haben interessante Drehgruppen, die spezielle Lösungsalgorithmen erfordern. Die meisten davon sind noch weitgehend unerforscht.

Am allereinfachsten ist der **selbstlösende Würfel**.

ENDE GUT, ALLES GUT

Ich erziehe meine Tochter antiautoritär,
aber sie macht trotzdem nicht, was ich will.
(Nina Hagen)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!