Übungen zur Mathematik des Zauberwürfels

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

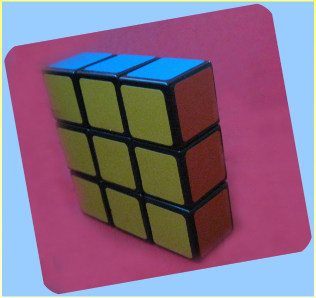
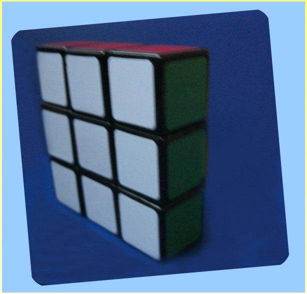
Lehrerfortbildung Mathematik

Universität Passau, 14.12.2022

Inhaltsübersicht

1. Der Floppy Cube 1x3x3

Heute gibt's beim Lidl Masken. 50 Stück für 33 Euro.
Und beim Aldi 10 Stück für 7 Euro, also viel billiger.
(aus einem Facebook Chat)

Es gibt vier Drehungen R, L, F, B um jeweils 180^o.

Die vier **Ecken** des Floppy-Cube werden untereinander vertauscht. Die Orientierung einer Ecke ist durch ihre Position festgelegt.

Wir halten die Ausrichtung der Mitte fest. Dann bleiben die vier **Kanten** des Floppy-Cupe stets an ihrem Ort und werden bei einer Drehung nur **gekippt**.

Die Stellung eines Floppy-Cube ist also beschrieben durch ein Element der symmetrischen Gruppe S_4 der Permutationen der vier Ecken und durch vier Elemente von S_2. Sie ist also ein Element der Gruppe $S_4 \times S_2 \times S_2 \times S_2 \times S_2$.

Sind alle diese $4! \cdot 2^4 = 24 \cdot 16 = 384$ Stellungen möglich?

Nein! Wenn man eine ungerade Anzahl von Drehungen macht, ist eine ungerade Anzahl von Kanten gekippt und die Eckenpermutation ist ungerade, d.h. sie besteht aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen.

Wenn man eine gerade Anzahl von Drehungen macht, ist eine gerade Anzahl von Kanten gekippt und die Eckenpermutation ist gerade.

Der Floppy-Cube besitzt also eine **Parität** und die Anzahl der möglichen Stellungen ist $384/2 = 192$.

Anders ausgedrückt, die **Floppy Cube Gruppe G** besitzt 192 Elemente.

Die Permutationsdarstellung von **G**

Bezeichnen wir die Eckenpositionen mit $\{1, 2, 3, 4\}$ und die Kantenorientierungen mit $\{5, 6\}$ bzw. $\{7, 8\}$ bzw. $\{9, 10\}$ bzw. $\{11, 12\}$, so können wir **G** als Untergruppe von S_{12} darstellen.

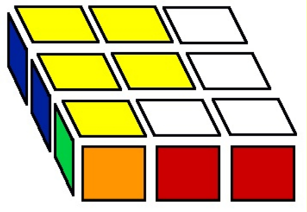
Die Drehung **R** entspricht dabei bei geeigneter Nummerierung z.B. der Doppeltransposition (12)(56). Die Gruppe **G** besteht also aus geraden Permutationen.

Sind die 192 verbleibenden Stellungen auch alle möglich?

Die Ordnung eines Elements

Ist a ein Element einer Gruppe **G**, so heißt die kleinste Zahl $i \geq 1$ mit $a^i = e$ die **Ordnung** von a. Sie wird mit $\mathrm{ord}(a)$ bezeichnet. Hierbei sei e das neutrale Element von **G**.

Gegeben sei die Zugfolge $Z = RF$ am Floppy Cube.



Durch Ausprobieren stellen wir fest, dass Z^6 die kleinste Potenz ist, die den gelösten Floppy Cube ergibt. Also folgt $\mathrm{ord}(Z) = 6$.

Die Ordnung einer Gruppe

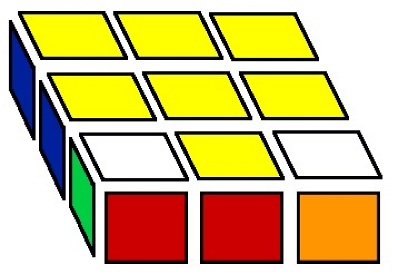
Nicht zu verwechseln mit der Ordnung eines Elements ist die **Ordnung einer Gruppe**. Sie ist einfach die Elementezahl der Gruppe und wird mit $\mathrm{ord}(\mathbf{G})$ bezeichnet.

Wieso hat die Floppy Gruppe **G** nun 192 Elemente?

Betrachte das Paar

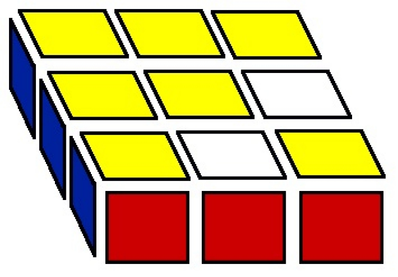
(Parität der Eckenpermutation, Zahl der gekippten Kanten).

Im Fall (ungerade, ungerade) mache eine beliebige Kantendrehung und erhalte (gerade, gerade). Alle Fälle (gerade, gerade) können wir durch folgende Zugfolgen herstellen, wobei wir (Identität, gerade) und (gerade, Identität) nacheinander erzeugen.



3-Zykel der Ecken

R F R



Zwei gekippte Kanten

R F R F R F

Da die geraden Permutationen in S_4 von den 3-Zykeln erzeugt sind, kann man mit Abwandlungen der ersten Zugfolge alle Stellungen (gerade, Identität) herstellen.

Mit Versionen der zweiten Zugfolge stellen wir alle Positionen (Identität, gerade) her.

Wie löst man den Floppy-Cube?

(1) Die Eckenpermutation kann man intuitiv reparieren, indem man die Sticker an den vier Außenkanten jeweils gleich macht.

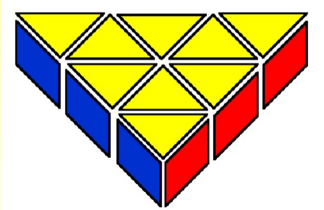
(2) Mit der Zugfolge **RFRFRF** und ihren Varianten können wir je zwei Kanten kippen. Damit bringen wir die richtigen Kantenfarben nach oben.

Der Weltrekord beim Floppy Cube liegt bei **0,89 Sekunden**. Wie schnell sind Sie?

2. Der Dreiecksfloppy Cube

Jetzt viele weitere Artikel bis zu -50% reduziert.

(C& A Werbung, 7.1.2021)

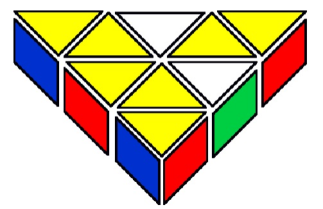


Es gibt 6 verschiedene Drehungen: die drei Kantendrehungen **R**, **L**, **B** und die drei Eckendrehungen **f**, **rb** und **lb**.

Entwicklung einer Lösungsstrategie

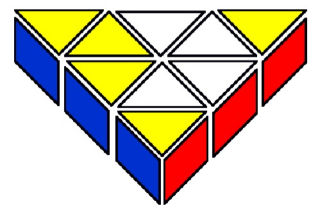
(1) Die drei Ecken sind unabhängig von den anderen 6 Teilen des Puzzles drehbar. Ihre Orientierung kann also am Ende der Lösung korrigiert werden.

(2) Es bietet sich daher an, zuerst mit Kantendrehungen die Ecken in die richtige Position zu bringen und sie dann korrekt zu orientieren.

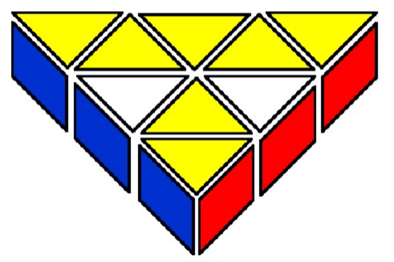


(3) Die restlichen 6 Teile bestehen aus 3 Kanten und 3 Mitten. Jede Drehung einer Eckvierergruppe entspricht einer Kantendrehung plus anschließendem Umdrehen des Puzzles. Sie vertauscht zwei Mitten und lässt die Ecken fest. Wir positionieren die Mitten also mit solchen Bewegungen, ohne die Positionen der Ecken zu ändern.

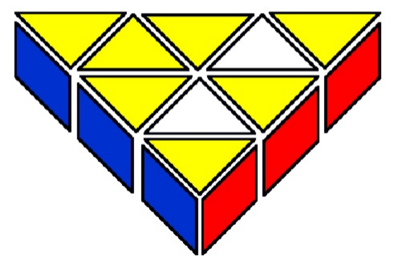
(4) Danach müssen wir noch die entsprechenden Ecken wieder richtig orientieren.



(5) Um jeweils zwei Kippungen von Mitten oder von Kanten zu reparieren, verwenden wir folgende Zugfolgen. Dazu seien $\mathbf{m_F}$, $\mathbf{m_R}$ und $\mathbf{m_L}$ die Drehungen der Eckvierergruppen vorne, rechts hinten und links hinten.



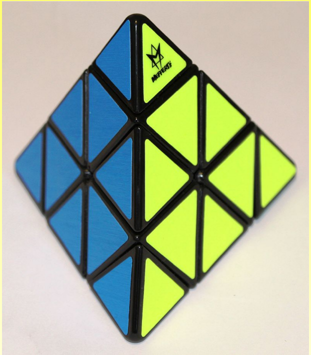
R L R L R L



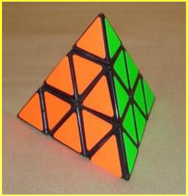
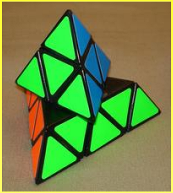
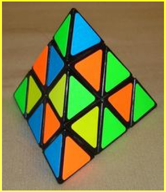
$\mathbf{m_F\ m_R\ m_F\ m_R\ m_F\ m_R\ f\ r}$

3. Der Pyraminx

Eine Mehrheit der Affen bezweifelt,
dass der Mensch von ihnen abstammt.



Erfunden **1970** von **Uwe Meffert** (1939-2022), patentiert 1981.

Der Pyraminx besitzt vier **triviale Spitzen**. Abgesehen davon gibt es vier Drehungen R, L, U, B (jeweils um 120^o im Uhrzeigersinn).

Wie löst man einen Pyraminx?

(1) Bringe die trivialen Spitzen in die korrekte Stellung, d.h. in die Position, die zu den darunter liegenden inneren Dreiecken passt.

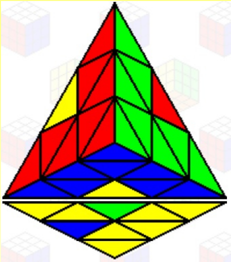
(2) Löse die **verlängerten Spitzen**, also die vier Spitzen zusammen mit den darunter liegenen Steinen intuitiv. Jetzt sind nur noch die 12 Sticker der 6 Kanten permutiert.

(3) Betrachte nun die Wirkung eines **Kommutators**:

R L' R' L

(rechts raus, links raus, rechts rein, links rein)

Auf der Unterseite findet ein 3-Zykel der Kanten statt. Zwei Kanten werden dabei gekippt.



$R\ L'\ R'\ L$

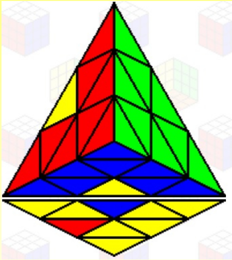
(4) Durch wiederholte Anwendung des Kommutators kann man die Kanten in die korrekte Position bringen.

(5) Um zwei Kanten (nämlich **vorne unten** und **links unten**) zu kippen, verfahre wie folgt:

(5a) Wende den Kommutator **R L' R' L** an.

(5b) Drehe das Puzzle um 120^o um die vertikale Mittelachse.

(5c) Wende den inversen Kommutator **L' R L R'** an.



R L' R' L R' B R B'

Die Mathematik des Pyraminx

Sei **P** die **reduzierte Pyraminxgruppe**, also die Gruppe der Stellungen ohne die Spitzen. Da die Spitzen trivial sind, ist dann $\mathbf{P} \times (S_3)^4$ die **volle Pyraminxgruppe**. Hierbei gilt

$$P \subseteq (S_3)^4 \times (S_2^6 \rtimes S_6).$$

Der erste Faktor entspricht den Stellungen der Mittelteile, der zweite den Kippungen der Kanten und der dritte den Positionen der Kanten. Das Produkt $\rtimes$ ist ein sogenanntes **semidirektes Produkt**.

Die Gruppe P hat **Index 4** in obigem Produkt, denn die Zahl der Kantenkippungen und die Permutation der Kanten sind gerade.

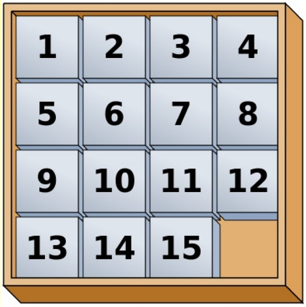
Sie hat demnach $\#P = 3^4 \cdot 2^6 \cdot 6!/4 =$ **933 120** Elemente.

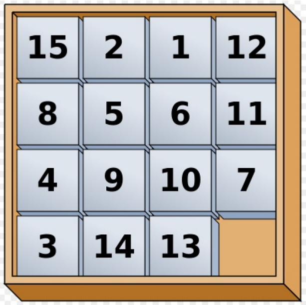
Die volle Pyraminxgruppe hat dann **75 582 720** Elemente.

4. Das 15-Puzzle

Lehrer: Wo wurde der Friedensvertrag von 1918 unterschrieben?

Schüler: Unten rechts?





Das 15-Puzzle wurde **1879** von **Noyes Chapman** (New York) erfunden. Im März 1880 beantragte er ein Patent dafür.

Ein mathematisches Modell

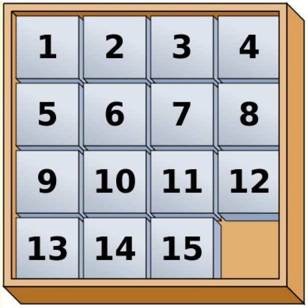
Das 15-Puzzle ist ein **Schiebepuzzle**. Die bedeutet, dass es (mindestens) ein Leerfeld gibt, auf das man anliegende Steine schieben kann. Um es als Permutationspuzzle zu modellieren, betrachten wir nur die Positionen, in denen das Leerfeld rechts unten liegt und nennen diese **Standardstellungen**.

Die gelöste Stellung ist von dieser Art. Jede Aufgabenstellung (in der Regel ein zufälliger **Scramble**) kann in diese Form gebracht werden.

Die Standardstellungen liefern Permutationen in S_{15}. Welche Permutationen sind hier möglich?

Definition: Ein **k-Zykel** ist eine Permutation der Form $z_1 \mapsto z_2$, $z_2 \mapsto z_3$, $\ldots$, $z_{k-1} \mapsto z_k$, $z_k \mapsto z_1$, wobei $z_1, \ldots, z_k$ paarweise verschiedene Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$ sind. Schreibweise: $(z_1\ z_2\ \cdots\ z_k)$.

Beispiel: Gegeben sie die gelöste Stellung des 15-Puzzles. Des Leerfeld habe die Nummer **0**.



Wenn wir die Transpositionen (0 15), (0 11), (0 12), (0 15) nacheinander ausführen, erhalten wir den 3-Zykel (15 12 11).

Beispiel: Wie können wir weitere 3-Zykel erzeugen, z.B. (8 7 15)?

(1) Zuerst führe geeigente **Setup Züge S** durch.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14		15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		12
13	14	11	15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	
13	14	11	15

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	15
13	14	11	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	12	15
13	14		11

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		15
13	14	12	11

(2) Dann führe den 3-Zykel **Z** aus. Schließlich mache die Setup Züge mit $\mathbf{S}^{-1}$ rückgängig.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10		15
13	14	12	11

1	2	3	4
5	6	8	15
9	10		7
13	14	12	11

1	2	3	4
5	6	8	15
9	10	11	12
13	14	7	

Etwas Gruppentheorie

(a) Die Zugfolge $\mathbf{SZS^{-1}}$ heißt die **Konjugation** von **Z** mit **S**.

(b) Ein 3-Zykel ist eine **gerade** Permutation, d.h. man braucht immer eine gerade Anzahl von Zügen im 15-Puzzle, um ihn zu erhalten.

(c) Die geraden Permutationen bilden die **alternierende Gruppe** $\mathbf{A}_{15}$, die genau die Hälfte der Permutationen der $\mathbf{S}_{15}$ enthält.

(d) Die 3-Zykel **erzeugen** die Gruppe $\mathbf{A}_{15}$, d.h. jede gerade Permutation ist Produkt von 3-Zykeln.

Fazit: Eine Standardstellung des 15-Puzzle ist genau dann lösbar, wenn sie einer geraden Permutation entspricht. Unterscheidet sie sich von der gelösten Stellung um genau eine Transposition, ist sie unlösbar.

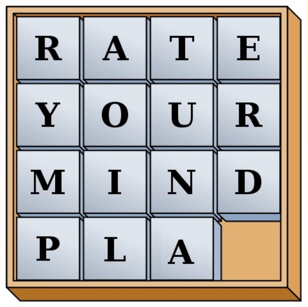
Aufgabe 1: Das 14-15 Puzzle

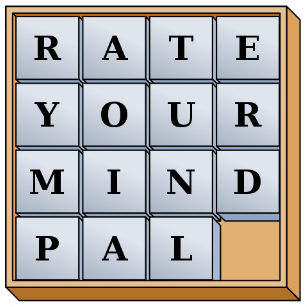
Der amerikanische Puzzleerfinder **Sam Lloyd** gab **1891** an, er habe das folgende 14-15 Puzzle erfunden. Auf eine korrekte Lösung war ein Preisgeld von **1000$** ausgesetzt.

Aufgabe 1: Musste Sam Lloyd das Preisgeld jemals auszahlen?

Aufgabe 2: Rate Your Mind, Pal!

Die Aufgabe in dem folgenden Puzzle ist mit der linken Anordnung zu starten und durch Züge des 15-Puzzles die rechte Anordnung zu erreichen.

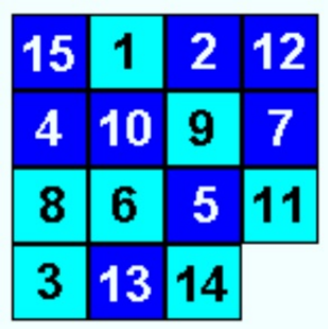




Aufgabe 2: Ist dieses Puzzle lösbar?

Aufgabe 3: Ein magisches 15-Puzzle

Aufgabe 3: Starte mit der gelösten Stellung und erzeuge eine Standardstellung, in der die Zahlen ein magisches 4x4-Quadrat bilden. Das Leerfeld zählt dabei als **0**.



THE END

Das Leben ist kurz.

Also lächle,

solange Du noch Zähne hast.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!