

Übung: Mit dem Zauberwürfel in die dritte Dimension

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung „Ab in die dritte Dimension“

Universität Passau, 13.12.2024

Inhaltsübersicht

- 1 Der Superwürfel
- 2 Der Superflip
- 3 Duale platonische Körper
- 4 Anwendungen des eulerschen Polyedersatzes
- 5 Klassifikation regulärer Polychora

1. Der Superwürfel

We can fix anything
if there's spaghetti involved!
(The Super Mario Brothers)

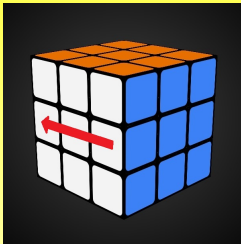
Bei einem **Superwürfel** sind die Aufkleber durch Bilder o.Ä. ersetzt, so dass die Orientierung der Seitenmitten sichtbar wird. Für die Reparatur eines Superwürfels brauchen wir also einen Zug, der Seitenmitten dreht.

Im gelösten Zustand muss die Summe der Seitenmittendrehungen immer 0° ergeben. Deshalb suchen wir einen Zug, der eine Seitenmitte um $+90^\circ$ und eine andere um -90° dreht.

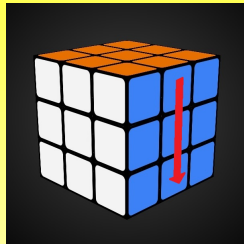
Drehungen der Mittelbänder



V = vertikal



H = horizontal



Q = quer

Frage 1: Was passiert beim Kommutator der Mittelbänder **HVH'V'**?

Antwort: Man erhält zwei 3-Zykel der Seitenmitten: **r** → **f** → **u** und **l** → **b** → **d**.

Frage 2: Wie erhält man hieraus Drehungen der Seitenmitten?

Antwort: Man macht die 3-Zykel auf eine andere Art rückgängig, z.B. mit $H'QHQ'$. Dann ergeben sich die Seitenmittendrehungen $f + 90^\circ$, $u - 90^\circ$, $d + 90^\circ$, $b - 90^\circ$ (im Uhrzeigersinn)



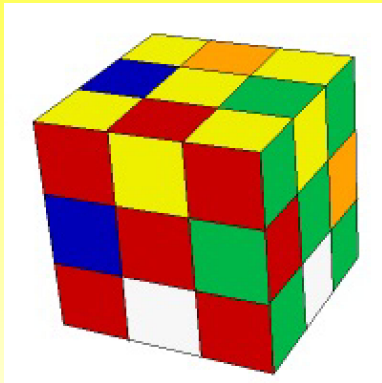
2. Der Superflip

Die meisten Tippfehler mache ich immer
auf dem Lottoschein.

Wenn man für jede Stellung des Zauberwürfels die kürzeste Lösung wüsste, was wäre dann die maximale Länge einer solchen optimalen Lösung?

Diese Zahl heißt die **Gotteszahl** des Zauberwürfels. Dabei zählen wir **R**, **R'** und **R²** jeweils als einen Zug, d.h. wir verwenden die **Seitendrehungsmetrik**.

Im Jahr **2010** wurde bewiesen, dass die Gotteszahl in der Seitendrehungsmetrik gleich **20** ist. Eine Position, die nachweisbar 20 Drehungen braucht, ist der **Superflip**.



Alle Kanten sind am richtigen Platz, aber gekippt.

Frage 3: Wie kann man mit dem Zug $(RH')^4$ den Superflip erzeugen? Wie viele Züge braucht man dazu in der Seitendrehungsmetrik?

Antwort: Der Zug $(RH')^4$ kippt die Kanten **ru**, **rf**, **fl** und **lb**. Drei dieser Kanten sind im Mittelband **H**.



Drehe den ganzen Würfel jetzt so, dass die noch nicht gekippte Kante **rb** an die Position **ru** kommt und die Kanten im horizontalen Mittelband noch nicht gekippt sind. Wiederhole den Zug $(RH')^4$.

Wenn wir uns die noch nicht gekippten Kanten ansehen, können wir den Würfel wieder so drehen, dass sie in die Positionen **ru**, **rf**, **fl** und **lb** kommen. Führe die Zugfolge $(RH')^4$ ein drittes Mal aus. Dann sind alle Kanten gekippt.

Weil H' zwei Drehungen erfordert, haben wir insgesamt **36** Drehungen in der Seitendrehungsmetrik gebraucht.



Eine kürzeste Lösung des Superflips mit **20** Drehungen ist $U R^2 F B R B^2 R U^2 L B^2 R U' D' R^2 F R' L B^2 U^2 F^2$.

3. Duale platonische Körper

Die Gesetze der Mathematik sind sehr lobenswert,
aber die einzigen Gesetze, die in Australien gelten,
sind die Gesetze von Australien.

(Malcolm Turnbull)

Verbindet man bei einem platonischen Körper die Mittelpunkte der Seitenflächen, so sind alle diese Kanten gleich lang und definieren einen Körper mit der gleichen **Symmetriegruppe**. Er heißt der **duale** platonische Körper. Wir erhalten folgende Dualitäten:

regulärer **Tetraeder** \leftrightarrow regulärer **Tetraeder** (selbstdual)

Würfel \leftrightarrow **Oktaeder**, **Dodekaeder** \leftrightarrow **Ikosaeder**

Frage 4: Wenn man einen **Megaminx** („flächendrehender Dodekaeder“) nimmt und den dualen platonischen Körper einzeichnet, welches Drehpuzzle erhält man dann? Wie viele Drehrichtungen, Ecken und Kanten hat es?



Antwort: Man erhält einen **Icosaminx** („eckendrehendes Ikosaeder“). Es hat 12 Drehrichtungen um die Halbachsen, die durch je eine der 12 Ecken gehen. Von jeder Ecke gehen 5 Kanten aus. Es sind also $12 \cdot 5 / 2 = 30$ Kanten.

4. Anwendungen des eulerschen Polyedersatzes

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.

(Blaise Pascal)

Satz (Der eulersche Polyedersatz)

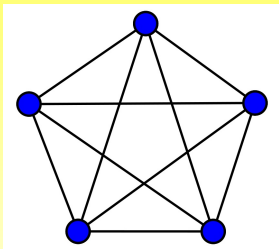
Sei e die Zahl der Ecken, k die Zahl der Kanten und f die Zahl Flächen eines zusammenhängenden ebenen Graphen, wobei die sich ins Unendliche erstreckende Fläche mitgezählt wird. Dann gilt:

$$e + f = k + 2$$

Der Graph K_5

In dubio pro secco.

In einem regulären 5-Eck zeichnet man alle Diagonalen ein und erhält den Graph K_5 .



Frage 5: Ist dies ein planarer Graph, d.h. kann man ihn überschneidungsfrei in die Ebene einbetten?

Antwort: NEIN!

Wir wenden den eulerschen Polyedersatz an.

Es sind offenbar $e = 5$ Ecken.

Je zwei Ecken sind durch eine Kante verbunden, d.h. wir haben

$k = \binom{5}{2} = 10$ Kanten.

Wäre der Graph überschneidungsfrei eingebettet, so würden je drei Ecken eine Fläche definieren. Dazu kommt noch die Außenfläche. Es wären also $f = 1 + \binom{5}{3} = 11$ Flächen.

Jetzt liefert $e + f = 16 \neq 12 = k + 2$ einen Widerspruch.

Der Fünf-Farben-Satz

Die Römer hatten es einfach. **X** war immer **10**.

Satz (Der Fünf-Farben-Satz)

*Gegeben sei eine Landkarte. Dann kann man die Länder dieser Karte so mit **5 Farben** einfärben, dass keine zwei Länder der gleichen Farbe eine gemeinsame Grenze haben.*

Ein einzelner Punkt zählt dabei nicht als gemeinsame Grenze. Jedes Land muss zusammenhängend sein. Dieser Satz wurde erstmals 1890 von **Percy Heawood** (England) bewiesen.

Im Jahr 1976 wurde durch einen computerunterstützten Beweis sogar gezeigt, dass der **Vier-Farben-Satz** gilt.

Graphentheoretische Formulierung

Für jedes Land wählen wir einen Punkt im Inneren.

Haben zwei Länder eine gemeinsame Grenze, so verbinden wir die zugehörigen Punkte mit einer (nicht notwendig geraden) Kante.

Diese Ecken und Kanten bilden den Graph $\Gamma = (E, K)$ der Landkarte. Seien $k \geq 2$ die Zahl und $\{1, 2, \dots, k\}$ die Namen der Farben.

Definition

(a) Eine **k -Färbung** von Γ ist eine Abbildung

$\varphi : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, so dass für jede Kante $(a_1, a_2) \in K$ gilt:
 $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$.

(b) Der Graph Γ heißt **k -färbbar**, wenn es eine k -Färbung gibt.

(c) Das kleinste k , für das Γ k -färbbar ist, heißt die **chromatische Zahl** von Γ .

Der Graph einer Landkarte ist ein ebener, zusammenhängender Graph. Es gilt also der eulersche Polyedersatz.

Satz (Graphentheoretischer Fünf-Farben-Satz)

Jeder ebene, zusammenhängende Graph ist 5-färbbar.

Beweis: Wähle für jede Fläche drei ihrer Kanten aus. Jede dieser Kanten begrenzt zwei Flächen. Dies liefert $3f \leq 2k$.

Frage 6: Welche Abschätzung $k \leq$ (Funktion von e) folgt hieraus?

Antwort: Der eulersche Polyedersatz liefert $k = f + e - 2 \leq \frac{2}{3}k + e - 2$, und somit $k \leq 3e - 6$.

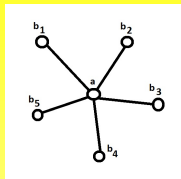
Für jede Ecke sei q_i die Zahl der von ihr ausgehenden Kanten. Dann gilt $\sum_{i=1}^e q_i = 2k < 6e$, und somit muss es eine Ecke mit $q_i \leq 5$ geben. Dies heißt die **Grad-5-Eigenschaft** planarer Graphen.

Nun schließen wir mit Induktion nach der Zahl e der Ecken $E = \{a_1, \dots, a_e\}$ von Γ . Der Induktionsanfang $e = 1$ erfüllt $f = 1$ und ist damit klar.

1. Fall: Gibt es in Γ eine Ecke $a_i \in E$ mit $q_i \leq 4$, so bilden wir den Graph Γ' mit $E' = E \setminus \{a_i\}$ und 5-färben ihn. Da von a_i höchstens 4 Kanten ausgehen, können wir für a_i eine zulässige fünfte Farbe wählen.

2. Fall: Nach der Grad-5-Eigenschaft gibt es eine Ecke $a_i \in E$ mit $q_i = 5$. Der Graph Γ' mit $E' = E \setminus \{a_i\}$ sei nach der Induktionsvoraussetzung 5-gefärbt.

Seien b_1, \dots, b_5 die im Uhrzeigersinn nummerierten Nachbarn von a .



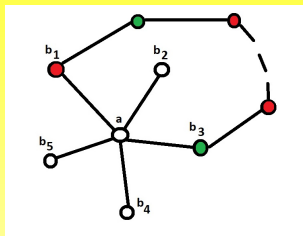
Wir können annehmen, dass b_1, \dots, b_5 in allen 5 Farben gefärbt sind, weil wir sonst für a einfach die übrige Farbe verwenden.

Unterfall 2a: Es gibt in Γ' **keinen Weg** von b_1 nach b_3 , der nur die Farben c_1 von b_1 und c_3 von b_3 (abwechselnd) verwendet.

In diesem Fall färbe b_1 in c_3 um. Färbe dann alle in c_3 gefärbten Nachbarn von b_1 in c_1 um, etc. Dieser Umfärbungsprozess endet und erreicht die Ecke b_3 nicht.

Anschließend haben die Nachbarn von a nur noch 4 Farben und wir können für a die fünfte Farbe c_1 verwenden.

Unterfall 2b: Es gibt in Γ' **einen Weg** W von b_1 nach b_3 , der nur die Farben c_1 von b_1 und c_3 von b_3 (abwechselnd) verwendet.



Nun kann es in Γ' keinen Weg von b_4 nach b_4 geben, der nur die Farben c_2 von b_2 und c_4 von b_4 (abwechselnd) verwendet. Jeder solche Weg müsste nämlich W irgendwo schneiden.

Also kann man von b_2 ausgehend wie im Unterfall (2a) eine Umfärbung vornehmen, bei der b_2 die Farbe c_4 erhält. Danach können wir dann a mit der Farbe c_2 versehen. □

Frage 7: Was bedeutet der Vier-Farben-Satz für die Drehpuzzles, die die Form eines konvexen Polyeders haben?

Antwort: Verwende die Zentralprojektion aus dem Vortrag. Es folgt, dass man die Seitenflächen 4-färben kann.

Beispiel (Landkarten auf einem Torus)

Frage 8: Wie viele Farben braucht man mindestens, um jede Landkarte auf einem Torus (Schwimmreifen) färben zu können?



Antwort: Bei dieser Torus-Landkarte grenzt jedes der 7 Länder an jedes andere. Also braucht man mindestens 7 Farben.

5. Klassifikation regulärer Polychora

Eine alte Bauernregel:
Steht im Winter noch das Korn,
Ist es wohl vergessen word'n.

Der eulersche Polyedersatz lässt sich auf n -dimensionale Polyeder verallgemeinern.

Für $i = 0, \dots, d$ sei k_i die Zahl der i -dimensionalen Begrenzungspolytope eines d -dimensionalen konvexen Polytops P .

$k_0 =$ Zahl der Ecken von P

$k_1 =$ Zahl der Kanten von P

$k_2 =$ Zahl der Seitenflächen von P

\dots $k_d = 1$ das Polytop P selbst

Satz (Der n -dim. eulersche Polyedersatz)

$$k_0 - k_1 + k_2 - + \cdots + (-1)^d k_d = 1$$

Für $d = 3$ ergibt sich $e - k + f - 1 = 1$, also $e + f = k + 2$.

Für $d = 4$ ergibt sich $e - k + f - p + 1 = 1$, also $e + f = k + c$, wobei p die Zahl der 3-dim. Polytope angibt, die das Polychoron begrenzen.

Mit dieser und weiteren Gleichungen kann man die 4-dimensionalen regulären Polyeder klassifizieren.

Wesentlich einfacher ist jedoch die folgende Methode, die auf den schweizer Mathematiker **Ludwig Schläfli** (1814-1895) zurückgeht.

Das Schläfli-Symbol eines Polytops

Für ein reguläres Polytop der Dimension 2, also für ein reguläres p -Eck, steht das Symbol $\{p\}$.

Für ein reguläres Polytop der Dimension 3, also für einen platonischen Körper, bei dem an jeder Ecke q reguläre p -Ecke zusammenstoßen, steht das Symbol $\{p, q\}$.

Für ein reguläres Polytop der Dimension 4, also für ein reguläres Polychoron, bei dem an jeder Ecke r platonische Körper mit dem Symbol $\{p, q\}$ zusammenstoßen, steht das Symbol $\{p, q, r\}$.

In höheren Dimensionen fährt man analog fort.

Die Schläfli-Bedingung

An jeder Kante des Polychorons muss eine **dichorale Winkelbedingung** für den Winkel zwischen zwei begrenzenden Polychora gelten, damit sich eine konvexe Menge ergibt.

Für ein reguläres Polychoron mit dem Schläfli-Symbol $\{p, q, r\}$ erhält man hieraus die **Schläfli-Bedingung**

$$\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{r}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$$

Frage 9: Ein reguläres Polychoron werde von regulären Tetraedern mit dem Schläfli-Symbol $\{p, q\} = \{3, 3\}$ begrenzt. Welche Werte von r sind möglich?

Antwort: Aus $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{r}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ erhalten wir $\sin\left(\frac{\pi}{r}\right) > \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$. Hieraus folgt $r \in \{3, 4, 5\}$.

Frage 10: Ein reguläres Polychoron werde von Würfeln begrenzt. Welche Werte von r sind möglich?

Antwort: Der Würfel hat das Schläfli-Symbol $\{4, 3\}$. Die Schläfli-Bedingung ergibt $\sin\left(\frac{\pi}{r}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $r = 3$. Das Polychoron mit dem Schläfli-Symbol $\{4, 3, 3\}$ ist der **Tesseract (Hyperwürfel)**.

Ebenso erhalten wir für $\{p, q\} = \{3, 4\}$ und $\{5, 3\}$ nur die Lösung $r = 3$. Es ergeben sich der **24-Zeller** mit dem Symbol $\{3, 4, 3\}$ und der **120-Zeller (Hyperdodekaeder)** mit dem Symbol $\{5, 3, 3\}$.

Frage 12: Gibt es ein reguläres Polychoron, das von Ikosaedern begrenzt wird?

Antwort: Nein, denn der Ikosaeder hat das Schläfli-Symbol $\{3, 5\}$ und die Schläfli-Bedingung $\sin(\frac{\pi}{3}) \sin(\frac{\pi}{r}) > \cos(\frac{\pi}{5})$ liefert $\sin(\frac{\pi}{r}) > \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\frac{\pi}{5}) \approx 0,93$, was für $r \geq 3$ nicht möglich ist.

Insgesamt erhalten wir die folgenden 6 regulären Polychora:

$\{3, 3, 3\}$	5-Zeller	Pentachoron
$\{3, 3, 4\}$	16-Zeller	Kreuzpolytop, Hyperoktaeder
$\{3, 3, 5\}$	600-Zeller	Tetraplex
$\{4, 3, 3\}$	8-Zeller	Tesseract, Hyperwürfel
$\{3, 4, 3\}$	24-Zeller	Hyperdiamant
$\{5, 3, 3\}$	120-Zeller	Hyperdodekaeder

Bemerkung: Man kann aus dem Schläfli-Symbol $\{p, q, r\}$, aus dem eulerschen Polyedersatz und aus den Werten für die platonischen Körper $\{p, q\}$ und $\{q, r\}$ Beziehungen zwischen den Zahlen e , k , f und c herleiten.

Diese genügen aber noch nicht, diese Zahlen explizit zu bestimmen. Dazu muss man entweder Argumente aus der Geometrie oder der Gruppentheorie dazunehmen. Es ergibt sich folgende Tabelle:

$\{p, q, r\}$	e	k	f	c
$\{3, 3, 3\}$	5	10	10	5
$\{3, 3, 4\}$	8	24	32	16
$\{4, 3, 3\}$	16	32	24	8
$\{3, 4, 3\}$	24	96	96	24
$\{3, 3, 5\}$	120	720	1200	600
$\{5, 3, 3\}$	600	1200	720	120

THE END

Ich wünschte, ich hätte besser aufgepasst,
was mir meine Mutter sagte, als ich jung war.
Warum, was hat sie dir denn gesagt?
Das weiß ich nicht, ich habe ja nicht aufgepasst.
(Douglas Adams)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!