Räumliches Denken mit dem Zauberwürfel

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung „Ab in die dritte Dimension“

Universität Passau, 13.12.2024

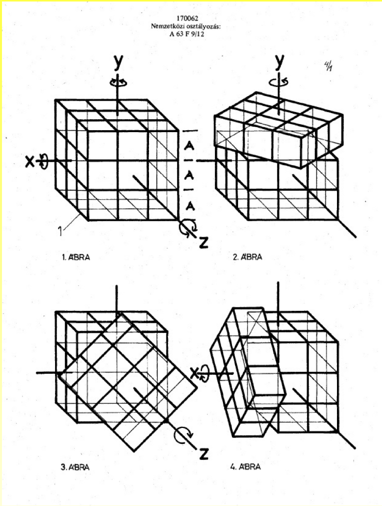
Inhaltsübersicht

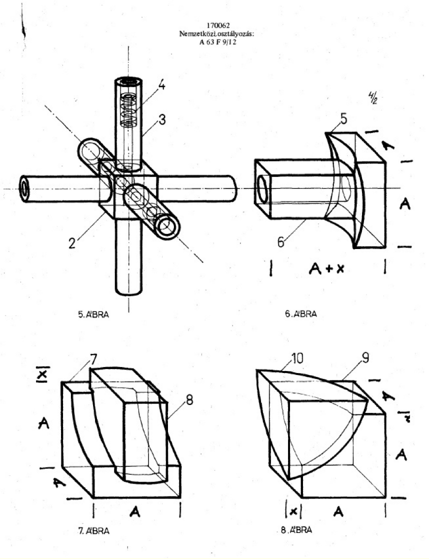
1. Eine kurze Geschichte des Zauberwürfels

Children are masters of play.
It is often described as their most important job,
and a basic part of how they learn.
(Ernő Rubik)

1974 **Ernő Rubik**, ein ungarischer Professor für Architektur, erfindet den **Zauberwürfel**.

1975 Der Erfinder registriert sein ungarisches Patent **HU170062**, welches 1977 erteilt wird.


170062
Nemzetközi osztályozás:
A 63 F 9/12
4/1
y
y
x
A
A
A
1
z
1. ÁBRA
2. ÁBRA
x
z
3. ÁBRA
4. ÁBRA


170062
Nemzetközi osztályozás:
A 63 F 9/12
4/2
4
3
2
5
6
A
A+x
5. ÁBRA
6. ÁBRA
7
8
x
A
A
7. ÁBRA
10
9
A
x
A
8. ÁBRA

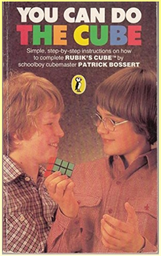
1977 Die ungarische Firma **Politechnika** (später in **Politoys** umbenannt) produziert ca. 5000 Zauberwürfel.

1978–1980 Die Firmen **Pentangle (GB)** und **Ideal Toys (USA)** übernehmen den internationalen Vertrieb und bestellen 500.000 Zauberwürfel. Aus Marketinggründen wird er in **Rubik's Cube** umbenannt.

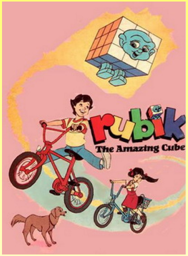
1980 Der Zauberwürfel wird auf internationalen Spielwarenmessen vorgestellt und in Deutschland zum **Spiel des Jahres** gewählt. Innerhalb eines Jahres werden **100 Millionen Zauberwürfel** verkauft.

1981 Patrick Bossert, ein 12-jähriger Junge aus England, schreibt das Buch **You Can Do the Cube**. Es verkauft sich 1,5 Millionen Mal und steht auf der *New York Times* Bestsellerliste.

1982 Die erste Speedcubing Weltmeisterschaft findet in Budapest statt. Der Sieger ist ein 16-jähriger, in Vietnam geborener Schüler mit einer Zeit von **22,95 Sekunden**.



1983-1984 Der Fernsehsender ABC sendet jeden Samstag morgens eine Folge der Zeichentrickserie **Rubik, the Amazing Cube**. Der Held ist ein Zauberwürfel mit Armen und Beinen.



Der Zauberwürfel heutzutage

11.6.2023 **Max Park** stellt einen neuen Weltrekord im Speedcubing auf. Er löst den Zauberwürfel in **3,13 Sekunden**.

2024 Der Zauberwürfel ist das meistverkaufte Spielzeug der Welt. Es wurden insgesamt schon über 500 Millionen Zauberwürfel verkauft.

2024 Im `twistypuzzles.com` Online Museum sind bereits über **12000 Drehpuzzles** (Varianten des Zauberwürfels) gelistet und **fast täglich** kommen neue hinzu.

2. Räumliches Denken löst den Zauberwürfel

Es hat keinen Sinn,
Kinder zu erziehen,
sie machen sowieso alles nach.
(Karl Valentin)

Der 3x3x3 Zauberwürfel (**„Rubiks Cube“**) hat außen 26 Würfelchen (**„cubies“**), die mit 54 Aufklebern (**„stickers“**) in 6 Farben beklebt sind oder aus Plastik in 6 Farben bestehen.

Das Spiel besteht darin, die Seiten zufällig zu verdrehen (**„scramble“**) und dann einen Weg zu finden, den Zauberwürfel wieder in die Ausgangsstellung zu bringen.

Weitere Definitionen

Es gibt zwei Sorten von Würfelchen: **Ecken** und **Kanten**. Eine Ecke hat drei, eine Kante zwei mögliche Orientierungen.

Idee: Wir brauchen Zugfolgen (**„algorithms“**), die nur wenige Würfelchen bewegen, damit wir die verschiedenen Sorten und Orientierungen separat reparieren können.

R drehe die **Rechte** Seite im Uhrzeigersinn um 90^{o}

L drehe die **Linke** Seite im Uhrzeigersinn um 90^{o}

F drehe die **Front** Seite im Uhrzeigersinn um 90^{o}

B drehe die **Back** Seite im Uhrzeigersinn um 90^{o}

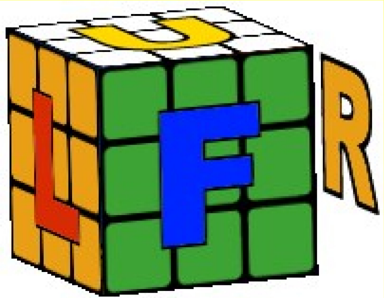
U drehe die **Up** Seite im Uhrzeigersinn um 90^{o}

D drehe die **Down** Seite im Uhrzeigersinn um 90^{o}

Weitere Bewegungen

R', L', F', B', U', D' entsprechende Drehungen um 90° im Gegenuhrzeigersinn, also $R' = R^{-1}$ etc.

R^2, L^2, F^2, B^2, U^2, D^2 entsprechende Drehungen um 180°



Mathematisches Modell

Indem man die Seitenmitten im Raum fest positioniert, kann man die Wirkung der Bewegungen des Zauberwürfels als Permutationen der 48 Sticker der Ecken und Kanten interpretieren.

Die Zauberwürfelgruppe G ist damit eine **Untergruppe** von S_{48}. Sie hat

$$\mathbf{43,252,003,274,489,856,000} \quad \text{Elemente!}$$

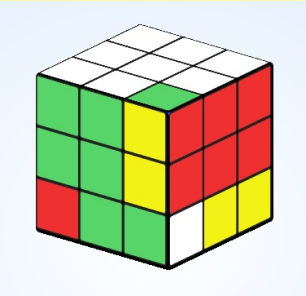
Die Gruppe G wird von den Permutationen **erzeugt**, die zu den Drehungen **R, L, F, B, U, D** gehören, d.h. jede Permutation kommt von einem Produkt dieser Drehungen und ihrer Inversen.

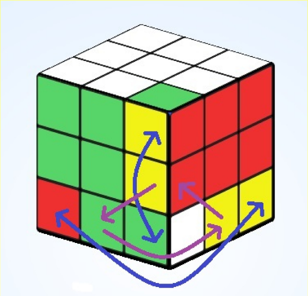
Die Identität **I** ist das neutrale Element von G.

Die Drehungen erfüllen gewisse **Relationen**, z.B. $\mathbf{R}^4 = \mathbf{I}$.

Der Kommutator

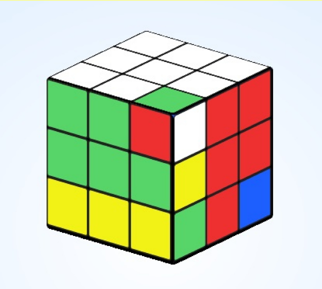
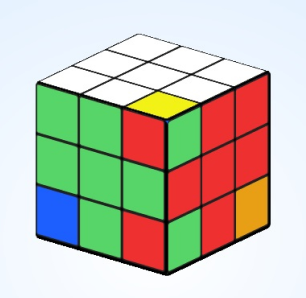
Eine Zugfolge wie **C = R F' R' F** (**raus, raus, rein, rein**) heißt ein **Kommutator**. Was hat sie mit den Würfelchen gemacht?





Der Kommutator C hat die **Ordnung** 6, d.h. es gilt $\mathbf{C}^6 = \mathbf{I}$.

Wenn wir die Wirkung des Kommutators **C** betrachten, liegt es nahe zu prüfen, was $\mathbf{C}^2$ und $\mathbf{C}^3$ tun.

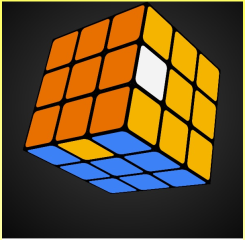
 

Hier ist $\mathbf{C}^2$ ein **3-Zykel** von Kanten zusammen mit Eckendrehungen und $\mathbf{C}^3$ ist eine **Doppeltransposition** von Ecken.

Idee: Mit diesen Zugfolgen können wir bereits gewisse Reparaturen durchführen.

Positionierung der Kanten

Angenommen, wir wollen einen 3-Zykel von Kanten auf der **U** Seite reparieren, z.B.



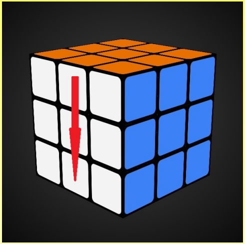
(1) Bringe die drei Kanten zuerst mit **Setup Zügen** in die Positionen, die wir für $\mathbf{C^2}$ brauchen.

(2) Vertausche sie mit dieser Zugfolge reihum.

(3) Mache die Setup-Züge rückgängig.

Ein einfacherer Kantenzykel

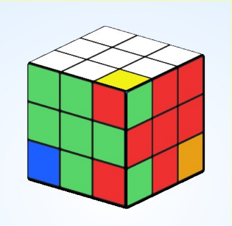
Bezeichnen wir die Bewegung des vertikalen Mittelbands mit **V**, so ergibt der Kommutator $\mathbf{VD^2V'D^2}$ einen einfacheren 3-Zykel von Kanten.

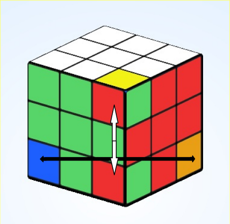
 

Um z.B. den 3-Zykel der vorhergehenden Seite zu reparieren, verwenden wir die Setup-Züge $\mathbf{R^2D'}$, dann $\mathbf{F^2VF^2V'}$ und schließlich $\mathbf{DR^2}$.

Positionierung der Ecken

Betrachten wir noch einmal die Wirkung von $\mathbf{C}^3$, wobei $\mathbf{C} = \mathbf{RF'R'F}$ der Kommutator („raus, raus, rein,rein") ist.





Mit der Doppeltransposition der Ecken **fru** $\leftrightarrow$ **frd** und **brd** $\leftrightarrow$ **fld** können wir drei Ecken auf der rechten Seite vertauschen:

(1) $\mathbf{C}^3$ ausführen, dann mit **U** die **rub** Ecke nach vorne bringen.

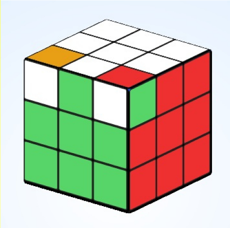
(2) Mit $(\mathbf{C}')^3$ den Kommutator rückgängig machen.

(3) Mit **U′** den Setup-Zug umkehren.

Beachte, dass die Umkehrung von $\mathbf{C} = \mathbf{RF'R'F}$ der Kommutator $\mathbf{C'} = \mathbf{F'RFR'}$ ist: **„raus, raus, rein, rein“**, aber nach links anfangen. Das Ergebnis von $\mathbf{C^3U(C')^3U'}$ ist

Dies ist ein 3-Zykel der Ecken **frd** $\rightarrow$ **fru** $\rightarrow$ **rbu**.

Drehung der Ecken



(1) Wende $\mathbf{C}^2$ an, um die **fru** Ecke um 120° zu drehen.

(2) Verwende den Setup-Zug **U’**.

(3) Mittels $(\mathbf{C}')^2$ drehe die **fru** Ecke um $-120°$.

(4) Mache den Setup-Zug mit **U** rückgängig.

Das Kippen der Kanten

Mit dem Kommutator kann man auch Kanten kippen. Es gibt aber eine viel einfachere Zugfolge dafür.

Sei **H** die 90^{o} Drehung des **horizontalen Mittelbands**:

Die Zugfolge $(\mathbf{RH'})^{\mathbf{4}}$ kippt die vier Kanten **ru**, **rf**, **fl** und **lb**.

(1) Wende $(\mathbf{RH'})^{\mathbf{4}}$ an um die **ru** Kante zu kippen.

(2) Bringe mit **U** die nächste zu kippende Kante an die **ru** Position.

(3) Wende $(\mathbf{RH'})^{\mathbf{4}}$ an und mache den Setup-Zug mit **U′** rückgängig.

Warum reichen diese Zugfolgen aus?

Satz

Die Permutationen der Ecken, der Kanten und der Kantensticker eines Zauberwürfels sind stets **gerade***.*

Insbesondere hat man die folgenden **Paritäten***:*

(a) *Eine reine Eckenpermutation ist gerade.*

(b) *Eine reine Kantenpermutation ist gerade.*

(c) *Es ist stets eine gerade Anzahl von Kanten gekippt.*

Beweis: Eine 90^{o} Drehung einer Seite liefert einen 4-Zykel der Ecken und einen 4-Zykel der Kanten. Ein 4-Zykel ist ungerade, zwei 4-Zykel sind gerade.

Desweiteren liefert eine 90^{o} Drehung zwei 4-Zykel der Kantensticker. Auch diese Permutation ist gerade. □

Satz

Sei A_n die **alternierende Gruppe**, *also die Menge aller geraden Permutationen in S_n.*

(a) *Die Gruppe A_n wird von den Doppeltranspositionen erzeugt.*

(b) *Die Gruppe A_n wird von den 3-Zyklen erzeugt.*

Beweis: **(a)** Schreibt man eine gerade Permutation als Produkt von Transpositionen, so hat man eine gerade Anzahl an Faktoren.

(b) Dies folgt aus $(12)(34) = (123)(234)$. □

Aus diesen beiden Sätzen folgt, dass man mit den gezeigten Zugfolgen tatsächlich jede Stellung des Zauberwürfels lösen kann.

3. Drehpuzzles und die platonischen Körper

Ich versuche gerade nachzudenken.
Bring mich nicht mit Tatsachen durcheinander.
(Plato)

Ein **platonischer Körper** hat als Seitenflächen reguläre n-Ecke mit einem festen n und an jeder seiner Ecken stoßen gleich viele dieser regulären n-Ecke zusammen.

Satz

Es gibt genau fünf platonische Körper.

Beweis: Die Summe der Innenwinkel der regulären n-Ecke, die an einer Ecke des Polyeders zusammenstoßen, muss kleiner als 360^{o} sein.

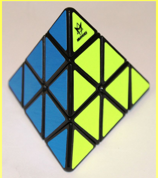
(1) k gleichseitige Dreiecke mit je 60^{o} mit $k = 3, 4, 5$

(2) 3 Quadrate mit je 90^{o}

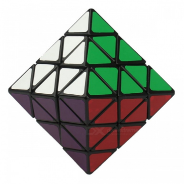
(3) 3 reguläre Fünfecke mit je 108^{o}

Diese fünf Möglichkeiten existieren auch wirklich, wie die folgenden Drehpuzzles zeigen. $\square$

Weitere platonische Körper



Tetraeder (Pyraminx)



Oktaeder

Dodekaeder (Megaminx)

Ikosaeder

Die Drehachsen stehen bei diesen Beispielen jeweils auf den Seitenflächenmitten senkrecht.

Tetraeder **4**, Würfel **6**, Oktaeder **8**, Dodekaeder **12**, Ikosaeder **20** Drehachsen **(face turning puzzles)**

4. Der eulersche Polyedersatz

**Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Da-sein, sondern das Hinkommen,
was den größten Genuss gewährt.**
(Leonhard Euler)

Ein **Graph** (E, K) besteht aus einer Menge E von Punkten, genannt **Ecken**, und einer Menge K von Strecken, die Paare dieser Punkte verbinden, genannt **Kanten**.

Ein Graph heißt **planar** (oder **eben**), wenn seine Punkte in einer Ebene enthalten sind und sich keine zwei Kanten schneiden.

Satz (Der eulersche Polyedersatz)

Sei e die Zahl der Ecken, k die Zahl der Kanten und f die Zahl der von den Kanten berandeten Flächen eines **zusammenhängenden** *ebenen Graphen, wobei die sich ins Unendliche erstreckende Fläche mitgezählt wird. Dann gilt:*

$$e + f \;=\; k + 2$$

Beweis: Induktion nach $e + k$. **Induktionsanfang:** $e = 1$, $k = 0$. Dann gilt $f = 1$ und $e + f = 1 + 1 = 0 + 2 = k + 2$.

Induktionsschritt: **1. Fall:** neue Ecke, die sofort durch eine Kante mit einer anderen Ecke verbunden werden muss, also $e' = e + 1$ und $k' = k + 1$. Hier gilt $f' = f$.

2.Fall: neue Kante zwischen zwei bestehenden Ecken. Hier gilt $e' = e$, $k' = k + 1$ und $f' = f + 1$, da eine Fläche zerteilt wird.

In beiden Fällen folgt $e' + f' \;=\; k' + 2$. □

Anwendung auf Polyeder

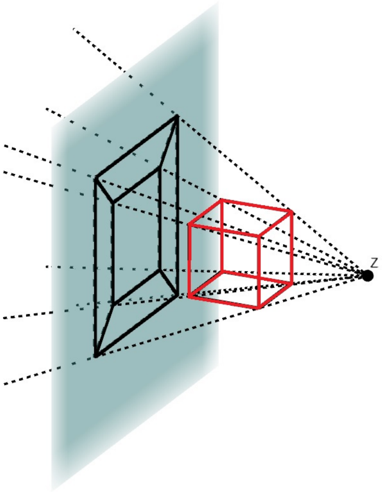
Die Ecken und Kanten eines Polyeders bilden einen (räumlichen) Graphen, den wir sein **Skelett** nennen.

Ist der Polyeder **konvex** und projiziert man ihn von einem Punkt knapp außerhalb der Mitte einer Seitenfläche in eine Ebene, so ist das Bild dieses Graphen ein planar Graph.

Die Seitenfläche, über der das Projektionszentrum Z liegt, überdeckt den Umriss des Bildes ein zweites Mal. Wie ersetzen sie durch die Fläche außerhalb des Umrisses.

Folglich gilt die Gleichung $e + f = k + 2$ auch für das Skelett eines Polyeders.

Beispiel (Zentralprojektion eines Würfels)



2. Klassifikation der platonischen Körper

Sei $q \geq 3$ der **Eckengrad** eines platonischen Körpers, d.h. die Zahl der Kanten, die von einer Ecke weggehen. Dieser bestehe aus n-Ecken.

$e \cdot q = 2 \cdot k$, da jede Kante von zwei Ecken weggeht.

$f \cdot n = 2 \cdot k$, da jede Fläche von n Kanten begrenzt ist und jede Kante zwei Flächen begrenzt.

$e + f = k + 2$ nach dem eulerschen Polyedersatz

$\Rightarrow \ \frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{k} > 0 \qquad \Rightarrow \ \frac{1}{q} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \ (q, n) \in \{ (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3) \}$

5. Die archimedischen Körper

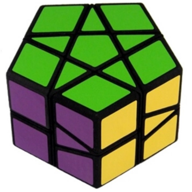
Viele Sätze der Geometrie,
die am Anfang unangreifbar schienen,
sind mit der Zeit ausgearbeitet worden.
(Archimedes von Syrakus)

Die Seitenflächen eines **archimedischen Körpers** sind reguläre n-Ecke, wobei aber verschiedene Werte von n erlaubt sind. An jeder Ecke des Körpers müssen aber die gleichen n-Ecke auf die gleiche Art zusammentreffen. Die platonischen Körper, die regulären Prismen und die regulären Antiprismen sind dabei ausgenommen.

Satz (Archimedes (287-212 v. Chr.))

Es gibt 16 verschiedene archimedische Körper.

Prismen und Antiprismen

Dreiecksprisma   Pentaprisma   Quadratisches Antiprisma

Für $n \geq 3$ hat das reguläre n-**Prisma** zwei n-Ecke oben und unten sowie n Quadrate an den Seiten.

Für $n \geq 4$ hat das reguläre n-**Antiprisma** zwei verdrehte, parallele n-Ecke oben und unten sowie $2n$ reguläre Dreiecke an den Seiten.

Klassifikation der archimedischen Körper

Von jeder Ecke gehen q Kanten weg, d.h. dort stoßen q Flächen zusammen. Die Eckenzahlen $(s_1, \ldots, s_q)$ dieser Flächen bilden den **Typ** des archimedischen Körpers.

Weil die Winkelsumme der angrenzenden Flächen kleiner als 360$^\mathrm{o}$ ist, gilt $\frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_q} > \frac{q}{2} - 1$. Wegen $\frac{1}{s_i} \leq \frac{1}{3}$ erhalten wir $q \in \{3, 4, 5\}$.

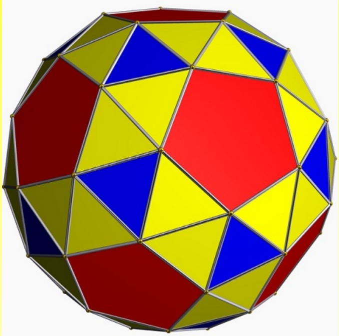
1. Fall: $q = 5$ geht nur für $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 3$ und $s_5 \in \{4, 5\}$.

(1a) Typ $(3, 3, 3, 3, 4)$: **abgeschrägter Würfel**
(2 spiegelbildliche Varianten)

(1b) Typ $(3, 3, 3, 3, 5)$: **abgeschrägter Dodekaeder**
(2 spiegelbildliche Varianten)

Abgeschrägte archimedische Körper

abgeschrägter Würfel
(32 Dreiecke, 6 Quadrate)



abgeschrägter Dodekaeder
(80 Dreiecke, 12 Fünfecke)

2. Fall: $q = 4$. Hier muss mindestens ein $s_i = 3$ vorkommen.

(2a): Genau drei $s_i = 3$. Typ $(3, 3, 3, n)$ liefert die Antiprismen.

(2b): Genau zwei $s_i = 3$. Typ $(3, 3, n, m)$ geht nicht, wie man leicht sieht. Typ $(3, n, 3, m)$ impliziert $n = m \in \{4, 5\}$. Es ergeben sich zwei Möglichkeiten:

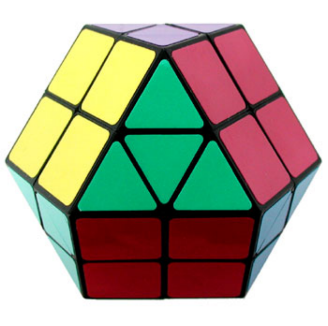
Typ $(3, 4, 3, 4)$: **Kuboktaeder**

Typ $(3, 5, 3, 5)$: **Ikosidodekaeder**

(2c): Genau ein $s_i = 3$. Man sieht leicht, dass dann mindestens zwei $s_i = 4$ vorkommen müssen.

Typ $(3, 4, 4, n)$ geht nur für $n = 4$. Es gibt den **Rhombenkuboktaeder** und den erst 1930 entdeckten **Pseudo-Rhombenkuboktaeder**. Letzterer wird oft nicht zu den archimedischen Körpern gezählt, obwohl er die lokale Uniformität der Ecken erfüllt.

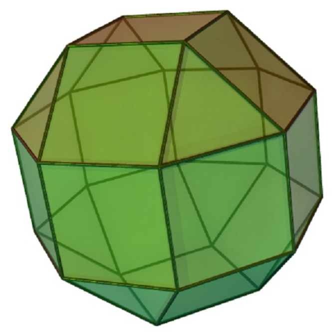
Kuboktaeder und Ikosidodekaeder



Kuboktaeder
(8 Dreiecke, 6 Quadrate)

Ikosidodekaeder
(20 Dreiecke, 12 Fünfecke)

Die zwei Rhombenkuboktaeder

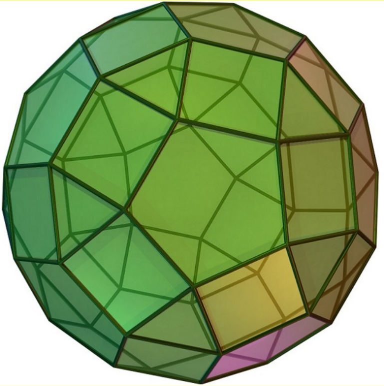


Rhombenkuboktaeder
(8 Dreiecke, 18 Quadrate)

Pseudo-Rhombenkuboktaeder
(die „Kappe“ ist verdreht!)

Der letzte Unterfall von **(2c)** ist Typ $(3,4,n,4)$ woraus $n=5$ folgt.

Typ $(3,4,5,4)$: **Rhombenikosidodekaeder**



3. Fall: $q = 3$. Es ergeben sich weitere 7 Typen:

Typ $(3, 6, 6)$: **Tetraederstumpf**

Typ $(3, 6, 6)$: **Würfelstumpf**

Typ $(4, 6, 6)$: **Oktaederstumpf**

Typ $(3, 10, 10)$: **Dodekaederstumpf**

Typ $(5, 6, 6)$: **Ikosaederstumpf, Fußballkörper, Tuttminx**

Typ $(4, 6, 8)$: **Kuboktaederstumpf, großes Rhombenkuboktaeder**

Typ $(4, 6, 10)$: **Ikosidodekaederstumpf, großer Rhombenikosidodekaeder**

Tetraederstumpf

Würfelstumpf

Oktaederstumpf

Dodekaederstumpf

Tuttminx

Kuboktaederstumpf

Das große Rhombenikosidodekaeder

Andere Formen von Zauberwürfeln

Kugel

Masterball

Zylinder

Pentabarrel

Rhombisches

Dodekaeder

Rex R. D.

Zauberwürfel höherer Ordnung

4x4x4

Rubiks Rache

17x17x17

Over the Top

WR: 49x49x49

Preston Alden (2024)

Weitere Drehpuzzles haben die Formen von **Johnson-Körpern**, von **Catalanischen Körpern** oder sind ganz unregelmäßig.

Es gibt auch spezielle Mechanismen und Einschränkungen wie **Getriebewürfel**, **bandagierte Würfel**, **Formwechselwürfel**, u.v.a.m.

Über 12000 verschiedene Typen sind im **Drehpuzzlemuseum**

`www.twistypuzzles.com`

zu finden.

Viele von ihnen haben interessante Drehgruppen, die spezielle Lösungsalgorithmen erfordern. Die meisten davon sind noch weitgehend unerforscht.

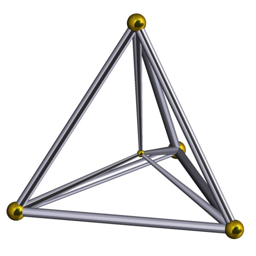
6. Ab in die vierte Dimension

Betrachte es positiv!
Das Schlimmste kommt erst noch!
(Mark Twain)

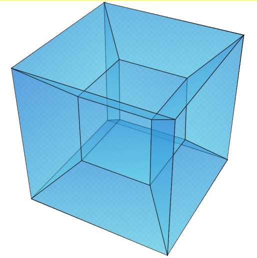
Das Analogon eines platonischen Körpers ist ein **reguläres Polychoron**. Ein solches 4-dimensionales Polytop wird von lauter gleichen platonischen Körpern begrenzt.

Satz

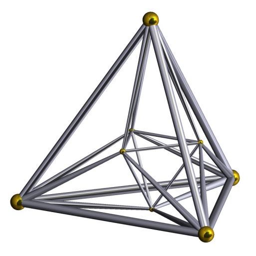
Es gibt im 4-dimensionalen Raum genau sechs verschiedene reguläre Polychora:



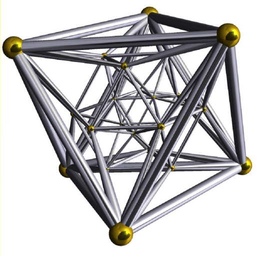
5-Zeller



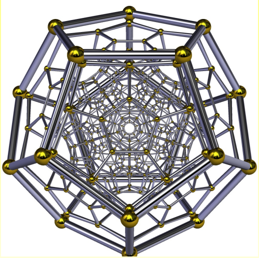
Tesserakt



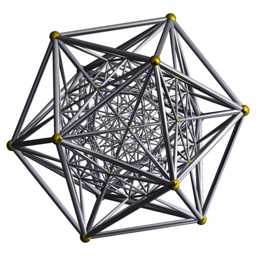
16-Zeller



24-Zeller

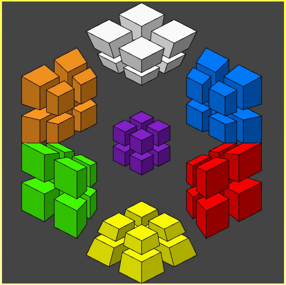


120-Zeller

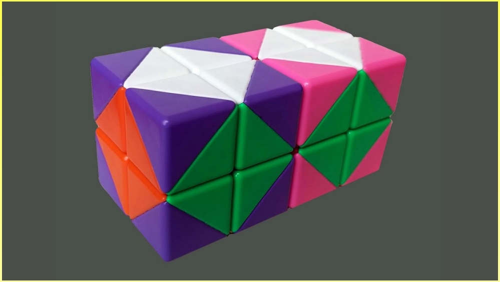


600-Zeller

Der $2 \times 2 \times 2 \times 2$ Zauberwürfel



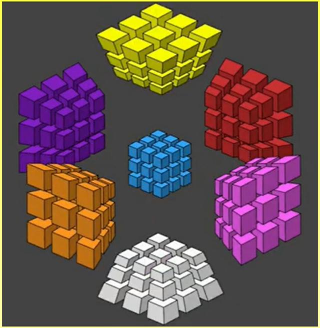
als Computerprogramm



als physikalisches Puzzle

Der aktuelle Weltrekord für den virtuellen $2 \times 2 \times 2 \times 2$-Tesserakt ist **23,68 Sekunden** und wird von Adam Marcellus Kelly (Dänemark) gehalten.

Der $3 \times 3 \times 3 \times 3$ Zauberwürfel



Erstmals gelöst **1987** von Andrey Astrelin (1969-2017).

Aktueller Weltrekord: **1:56 Minuten** (Andrew Farkas, USA)

Weltrekord für die kürzeste Lösung: **211 Züge** (Charles Doan)

Es gibt auch Youtube-Tutorials „How to Solve the 4D Rubik's Cube“.

ENDE GUT, ALLES GUT

Das Leben ist schön, aber kurz.
Also lächle,
solange Du noch Zähne hast.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!