Übungen zum Vortrag

Was ist die Matrix?

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung

„Ein Potpourri von Matrizen und Codes“

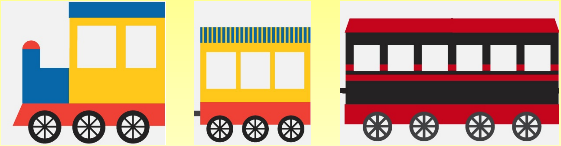
Universität Passau, 12.12.2025

Inhaltsübersicht

1. Wir basteln Züge

Welches Lieblingslied haben
die Züge der deutschen Bahn?
Irgendwie, irgendwo, irgendwann (Nena)

An eine Lok werden Wagons angehängt, von denen es 2 Typen gibt:



Typ 1 hat Länge 1, Typ 2 hat Länge 2. Die Lok zählt nicht mit.

Aufgabe 1: Wie viele verschiedene Züge der Länge 8 gibt es?

Lösung 1: Es gibt **34** Züge der Länge 8.

Aufgabe 2: Wie lautet die Rekursionsformel für die Zahl z_n der Züge der Länge n?

Lösung 2: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ und $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$ für $n \geq 3$.
Daher gilt $z_3 = 3$, $z_4 = 5$ $z_5 = 8$, $z_6 = 13$, $z_7 = 21$ und $z_8 = 34$.

Aufgabe 3: Wie kann man diese Rekursionsformel als Matrizengleichung schreiben?

Lösung 3: $\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4: Wenn wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in der Form $A = S\,D\,S^{-1}$ schreiben mit einer invertierbaren Matrix S und einer Diagonalmatrix D, wie sieht dann D aus?

Lösung 4: Die Elemente auf der Diagonalen von D sind $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Um dies zu sehen, schreiben wir $A \cdot \binom{v_1}{v_2} = a \binom{v_1}{v_2}$ und erhalten $v_2 = a\,v_1$ sowie $v_1 + v_2 = a\,v_2$. Dies liefert $a^2 - a - 1 = 0$ und somit $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Dabei ist $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ der **goldene Schnitt**. Sei $\sigma = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

Aufgabe 5: Wie lautet die Matrix S^{-1} in $A = S\,D\,S^{-1}$?

Lösung 5: Gesucht sind nicht-triviale Vektoren $\binom{v_1}{v_2}, \binom{w_1}{w_2}$ mit $A \binom{v_1}{v_2} = \tau \binom{v_1}{v_2}$ und $A \binom{w_1}{w_2} = \sigma \binom{w_1}{w_2}$. Wir lösen die beiden LGS und berechnen $\binom{v_1}{v_2} = \binom{1}{\tau}$ sowie $\binom{w_1}{w_2} = \binom{1}{\sigma}$.

Dies liefert $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau & \sigma \end{pmatrix}$ mit $\det(S^{-1}) = \sigma - \tau = -\sqrt{5}$.

Idee: Wenn wir $z_0 = 1$ und $z_{-1} = 0$ anfügen, so gilt

$$\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} z_{-1} \\ z_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Zahl z_n ist also die zweite Komponente von $A^n = S\, D^n\, S^{-1}$.
Ausmultiplizieren und Vereinfachen ergibt $z_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\tau^{n+1} - \sigma^{n+1}\right)$.
Die Zahl z_{n-1} ist die ***n*-te Fibonacci-Zahl** F_n. Dies liefert die Formel von **de Moivre** (1718) (auch: Formel von **Binet** (1843)):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

2. Und was sich reimt, ist gut

Wer hier nicht mehr weiter weiß,
der bildet einen Arbeitskreis.

Der indische Mathematiker **Virahanka** (ca. 6. Jhd. n. Chr.) untersuchte, aufbauend auf dem Manuskript von Pingala, in seinem Buch **Vrattajati Samuccaya**, welche Möglichkeiten es für den **Rhythmus** bei Sanskrit Gedichten gibt.

Dabei besteht ein Versmaß aus einer bestimmten Zahl von Silben. Jede Silbe ist entweder leicht (**laghu**, **L**) oder schwer (**guru**, **G**). Jede schwere Silbe **G** ist **doppelt** so lang wie eine leichte Silbe **L**.

Virahanka beschrieb folgenden Algorithmus zur Erzeugung des **Matra Prastaar**, d.h. der Matrix aller Möglichkeiten von Rhythmen der Dauer n.

Satz (Virahanka's Algorithmus)

(1) *Ist n gerade, so beginne mit einer Reihe von* **G**. *Ist n ungerade, so beginne mit einem* **L** *gefolgt von einer Reihe von* **G**.

(2) *Um eine Folgezeile zu generieren, lies die Zeile davor bis zum ersten* **G**. *Setze ein* **L** *darunter und kopiere die Silben rechts davon.*

(3) *Fülle die Folgezeile nach links mit der passenden Anzahl von* **G**. *Ist diese Anzahl ungerade, so setze ein* **L** *an den Anfang.*

(4) *Die letzte Zeile besteht aus lauter* **L**.

Aufgabe 6: Erzeuge nach diesem Algorithmus die Matrix für einen Vers mit vier Matras, d.h. von der Dauer $n = 4$.

Lösung 6: Das Prastaar für $n = 4$ Matras ist

$$\begin{pmatrix} & & \mathbf{G} & \mathbf{G} \\ & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{G} \\ & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{L} \\ & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Welche Struktur hat das Prastaar für $n = 6$?

$$\begin{pmatrix} & & & \mathbf{G} & \mathbf{G} & \mathbf{G} \\ & & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{G} \\ & & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{G} \\ & & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{G} \\ & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{G} \\ & & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{G} & \mathbf{L} \\ & & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{L} \\ & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{L} \\ & & \mathbf{G} & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ & \mathbf{L} & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ & \mathbf{G} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \end{pmatrix}$$

Lösung 6: **(a)** Das Prastaar für $n = 6$ hat 13 Zeilen.

(b) Die ersten 5 Zeilen enden mit **G**, die restlichen 8 mit **L**.

(c) Streicht man in den ersten 5 Zeilen das letzte **G**, so erhält man das Prastaar für $n = 4$.

Streicht man in den letzten 8 Zeilen das letzte **L**, so erhält man das Prastaar für $n = 5$. Wir haben also die folgende rekursive Struktur für das Prastaar P_n der Dauer n:

$$P_n = \begin{pmatrix} & \mathbf{G} \\ 0\ P_{n-2} & \vdots \\ & \mathbf{G} \\ & \mathbf{L} \\ P_{n-1} & \vdots \\ & \mathbf{L} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Wie viele Rhythmen der Dauer n gibt es?

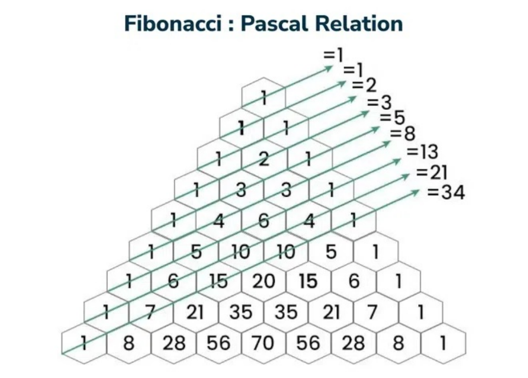
Lösung 7: Die Zahl z_n der Rhythmen der Länge n erfüllt $z_1 = 1$, $z_2 = 2$ und $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$ für $n \geq 3$.

Die Rhythmen der Länge n entsprechen genau den Zügen der Länge n aus Wagons der Längen 1 und 2. Ihre Anzahl ist $z_n = F_{n+1}$.

Aufgabe 8: Was haben die Rhythmen der Länge n mit dem **Halayudha Dreieck** zu tun? (**Tipp:** Steigung $\frac{1}{3}$)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 7
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

Antwort 8: Die Diagonalen der Steigung $\frac{1}{3}$ im Halayudha Dreieck addieren sich zu den Fibonacci Zahlen.



Aufgabe 9: Formuliere dies als Formel für die Binomialkoeffizienten und die Fibonacci Zahlen!

Lösung 9: $\binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n/2}{n/2} = F_{n+1}$ falls n gerade ist und

$\binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{(n+1)/2}{(n-1)/2} = F_{n+1}$ falls n ungerade ist.

Hausaufgabe 1: Beweise diese Formeln!

3. Ab in die Matrix

I kann't speim, speim, speim,
wenn mir beim IBAN Code
am End' drei Kastl übrig bleib'n.
(Martina Schwarzmann)

Aufgabe 10: **(a)** Welche Zahlen kommen im Pascalschen Dreieck vor?

(b) Welche Zahlen kommen im Pascalschen Dreieck mindestens zweimal vor?

(c) Welche Zahlen kommen im Pascalschen Dreieck unendlich oft vor?

Lösung 10: **(a)** Alle Zahlen $n \geq 1$ kommen wegen $\binom{n}{1} = n$ vor.

(b) Nur die Zahl 2 kommt genau einmal vor. Für $n \geq 3$ gilt $1 \neq n-1$ und $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

(c) Nur die Zahl 1 kommt unendlich oft vor.

Aufgabe 11: **(a)** Wie oft kommt eine ungerade Primzahl p im Pascalschen Dreieck vor?

(b) Wie oft kommt die Zahl 6 im Pascalschen Dreieck vor?

Lösung 11: **(a)** Eine ungerade Prinzahl kommt genau zweimal vor. Wäre $\binom{n}{k} = p$, so wäre $n \geq p$ und für $2 \leq k \leq n-2$ somit $\binom{n}{k} > \binom{n}{1} = n \geq p$.

(b) Die Zahl 6 kommt genau dreimal vor: $\binom{6}{1} = \binom{4}{2} = \binom{6}{5}$

Aufgabe 12: Sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Wie oft kommt $q = \frac{1}{2}\,p\,(p-1)$ im Pascalschen Dreieck vor?

Lösung 12: Diese Zahl kommt genau viermal vor, nämlich als $\binom{p}{2} = \binom{p}{p-2} = \binom{q}{1} = \binom{q}{q-1}$.

Satz

Die Gleichung $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k+1}$ *hat unendlich viele Lösungen. Insbesondere* $n = F_{2i+2}\,F_{2i+3}$ *und* $k = F_{2i}\,F_{2i+3}$ *lösen diese Gleichung für jedes* $i \geq 1$.

Dieser Satz wurde 1972 von **David Singmaster** bewiesen.

Aufgabe 13: Zeige, dass jede der Zahlen $\binom{F_{2i+2}\,F_{2i+3}}{F_{2i}\,F_{2i+3}}$ mit $i \geq 1$ mindestens sechsmal im Pascalschen Dreieck vorkommt.

Lösung 13: Für $i \geq 1$ sei $n = F_{2i+2}\, F_{2i+3}$ und $k = F_{2i}\, F_{2i+3}$. Nach dem Satz von Singmaster gilt $\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k-1}$.

Weiterhin gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n+1}{k-1} = \binom{n+1}{n-k+2}$ wegen der Symmetrie des Pascalschen Dreieicks.

Für $a = \binom{n}{k}$ gilt schließlich $a = \binom{a}{1} = \binom{a}{a-1}$.

Aufgabe 14: Zeige, dass die Zahl 3003 mindestens achtmal im Pascalschen Dreieck vorkommt.

Lösung 14: Für $i = 1$ ergibt sich $n = F_{2i+2}\, F_{2i+3} = 15$ sowie $k = F_{2i}\, F_{2i+3} = 5$. Nach dem Satz von Singmaster gilt $3003 = \binom{15}{5} = \binom{14}{6}$. Wegen der Symmetrie des Pascalschen Dreiecks gilt $3003 = \binom{15}{10} = \binom{14}{8}$. Offensichtlich gilt $3003 = \binom{3003}{1} = \binom{3003}{3002}$.

Jetzt müssen wir nur noch herausfinden, dass $3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 39 \cdot 77 = 78 \cdot 77/2 = \binom{78}{2} = \binom{78}{76}$ gilt.

Bemerkung: Mit einer Computersuche kann man zeigen, dass 3003 **genau achtmal** im Pascalschen Dreieck vorkommt. Es ist die einzige Zahl, vor der bekannt ist, dass sie achtmal vorkommt. Sonst ist keine Zahl bekannt, die mehr als sechsmal vorkommt.

Singmaster Vermutung: Jede Zahl kommt höchstens achtmal im Pascalschen Dreieck vor.

Es ist auch nicht bekannt, ob es Zahlen gibt, die genau fünfmal oder genau siebenmal im Pascalschen Dreieck vorkommen.

4. Heraus aus der Matrix

Die vollen Ergebnisse der Algebra
können nicht vermittelt werden,
ohne etwas Geometrie zu verwenden.
(Fibonacci)

Zu jeder 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gehört eine geometrische Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die gegeben ist durch $\varphi_A(\binom{x}{y}) = \binom{ax+by}{cx+dy}$.

Frage 1: Um welche Art von Abbildung handelt es sich hier?

Frage 2: Wie kann man die Abbildungen φ_A klassifizieren, die eine endliche Ordnung haben, d.h. die eine **Symmetrie** gewisser Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ darstellen?

Aufgabe 15: Wie kann man anhand der Matrix A erkennen, ob die Abbildung φ_A bijektiv ist?

Lösung 15: Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(A) = ad - bc \neq 0$ gilt.

Wenn man nämlich einen Punkt $\binom{p_1}{p_2} \in \mathbb{R}^2$ vorgibt, so hat das lineare Gleichungssystem $\varphi_A(\binom{x}{y}) = \binom{ax+by}{cx+dy} = \binom{p_1}{p_2}$ genau dann stets eine eindeutige Lösung, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

Voraussetzung: Im Folgenden gelte stets $\det(A) \neq 0$.

Aufgabe 16: Sei $s \in \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$.

(a) Welche Art von Abbildung φ_S wird durch $S = \left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$ definiert?

(b) Wie kann man φ_A zerlegen in eine Abbildung φ_S wie in (a) und eine Abbildung φ_B mit einer Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $\det(B) \in \{1, -1\}$?

Lösung 16: **(a)** Die Abbildung φ_S eine zentrische Streckung mit Zentrum $\binom{0}{0}$ und Steckungsfaktor s.

(b) Setze $s = |\det(A)|$ und $B = \begin{pmatrix} a/s & b/s \\ c/s & d/s \end{pmatrix}$. Dann gilt $A = S\,B$ für $S = \left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)$

Aufgabe 17: Die Abbildung φ_A habe eine **endliche Ordnung**, d.h. es gelte $(\varphi_A)^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ für ein $n \geq 1$. (Hierbei bezeichne $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ die **Identität** von $\mathbb{R}^2$.)

(a) Welche Bedingung folgt hieraus für die Matrix A?

(b) Welche Werte kann dann $\det(A)$ annehmen?

Lösung 17: **(a)** Wir rechnen nach, dass die Komposition $\varphi_B \circ \varphi_A$ genau die Abbildung φ_{BA} ist, die zu der Matrix BA gehört. Dann folgt aus $(\varphi_A)^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, dass A^n gleich der **Einheitsmatrix** $I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist.

(b) Wir rechnen den **Determinantenmultiplikationssatz** $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ nach. Dann folgt aus $A^n = I_2$, dass $\det(A) \in \{1, -1\}$ gilt.

Aufgabe 18: Hat jede 2×2 Matrix A mit $\det(A) \in \{1, -1\}$ eine endliche Ordnung?

Lösung 18: Nein, z.B. die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt $\det(A) = 1$ und $A^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ für alle $n \geq 1$.

Hausaufgabe 2: Beweise den folgenden Satz!

Satz

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *eine* 2×2 *Matrix mit* $\det(A) = 1$. *Dann gibt es eine Matrix* S *mit* $\det(S) = 1$, *sodass* $B = S\,A\,S^{-1}$ *wie folgt aussieht.*

(a) *Im Fall* $|a+d| > 2$ *gilt* $B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1/a' \end{pmatrix}$ *mit* $a' \neq 0$.

(b) *Im Fall* $|a+d| = 2$ *gilt* $B = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{smallmatrix}\right)$ *mit* $a' \in \{1, -1\}$ *und* $b' \in \mathbb{R}$.

(c) *Im Fall* $|a+d| < 2$ *gilt* $B = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ *mit* $a', b' \in \mathbb{R}$ *und* $(a')^2 + (b')^2 = 1$.

Aufgabe 19: Um welche Abbildungen φ_B handelt es sich in den Fällen **(a)**, **(b)** und **(c)** dieses Satzes?

Lösung 19: Im Fall **(a)** liegt eine Streckung um den Faktor a' in Richtung der x-Achse und um den Faktor $1/a'$ in Richtung der y-Achse vor. (Beachte, dass die Abbildung φ_A hier aus Streckungen in zwei nicht unbedingt senkrechte Richtungen besteht.)

Im Fall **(b)** mit $b' = 0$ ist φ_B die Identität oder die Punktspiegelung am Ursprung. Gilt hier $b' \neq 0$, so ist φ_B eine **Scherung** und hat unendliche Ordnung.

Im Fall **(c)** gibt es ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit $a' = \cos(\varphi)$ und $b' = \sin(\varphi)$. Dann ist B ein **Drehkästchen**, d.h. die Abbildung φ_B ist eine Drehung um den Winkel φ.

Aufgabe 20: Welche 2×2 Matrizen A haben Abbildungen φ_A endlicher Ordnung?

Lösung 20: Wir wissen $\det(A) \in \{1, -1\}$. Im Fall $\det(A) = 1$ wenden wir den Satz an. Tritt dort der Fall **(a)** oder **(b)** mit $b' = 0$ ein, so muss $B = \pm I_2$ gelten und somit auch $A = SBS^{-1} = \pm I_2$. Also ist φ_A die **Identität** oder die **Punktspiegelung** am Ursprung.

Im Fall **(b)** mit $b' \neq 0$ hat φ_A unendliche Ordnung. Im Fall **(c)**, also im Fall einer **Drehung** φ_B um einen Winkel φ, hat φ_A genau dann eine endliche Ordnung, wenn φ ein rationales Vielfaches von 2π ist.

Schließlich bleibt noch der Fall $\det(A) = -1$. In diesem Fall erhalten wir analog zu Teil **(a)** des Satzes eine Matrix $B = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & -1/a' \end{pmatrix}$ mit $a' \neq 0$. Damit B (und damit A) endliche Ordnung hat, muss hier $a' \in \{1, -1\}$ gelten. Somit ist φ_B, und damit auch φ_A, eine **Achsen-spiegelung**.

Satz (von Leonardo da Vinci)

Hat eine ebene Punktmenge eine endliche Symmetriegruppe, so ist diese entweder trival (nur die Identität), zyklisch (nur Drehungen endlicher Ordnung), oder eine Diedergruppe (Drehungen und Spiegelungen).

ENDE GUT, ALLES GUT

Ideen sind wie Kaninchen.
Man bekommt ein paar und lernt, mit ihnen umzugehen,
und schon bald hat man ein Gros.
(nach John Steinbeck)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!