Was ist die Matrix?

Martin Kreuzer

Universität Passau

martin.kreuzer@uni-passau.de

Lehrerfortbildung

„Ein Potpourri von Matrizen und Codes“

Universität Passau, 12.12.2025

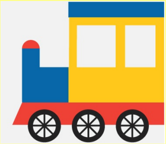
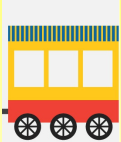
Inhaltsübersicht

1. Wir basteln Züge

Lehrer: Was ging 1945 zu Ende?

Schüler: 1944

An eine Lok werden Wagons angehängt, von denen es 3 Typen gibt:

Typ 1 hat Länge 1, die anderen beiden haben Länge 2. Die Länge der Lok wird nicht mitgezählt.

Frage 1: Wie viele verschiedene Züge der Länge 5 gibt es?

Antwort: Es gibt **21** verschiedene Züge der Länge 5.

Sei z_n die Zahl der Züge der Länge n. Dann gilt:

$z_1 = 1$, $z_2 = 3$, $z_n = z_{n-1} + 2\, z_{n-2}$ für $n \geq 3$.

Dies liefert $z_3 = 5$, $z_4 = 11$ und $z_5 = 21$.

Frage 2: Wir bilden die Vektoren $\binom{z_{n-1}}{z_n}$. Wie kann man die Rekursionsgleichung als Matrizenmultiplikation für diese Vektoren darstellen?

Antwort 2: $\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Frage 3: Wie kann man hieraus eine Formel für z_n gewinnen, die die Matrizenmultiplikation verwendet?

Antwort 3: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \;=\; A \cdot \begin{pmatrix} z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \;=\; A^2 \cdot \begin{pmatrix} z_{n-3} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} \;=\; \cdots \\ \cdots \;=\; A^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \;=\; A^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Frage 4: Wie kann man A^n für große n berechnen?

Antwort 4: Die Idee ist, A in der Form $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$ zu schreiben mit einer invertierbaren Matrix S und einer Diagonalmatrix D.

Dann gilt $A^n = (SDS^{-1})\,(SDS^{-1}) \cdots (SDS^{-1}) = S\,D^n S^{-1}$.

Für eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ können wir $D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ leicht berechnen.

Wir suchen also zwei **Eigenvektoren** $v = \binom{v_1}{v_2}$ und $w = \binom{w_1}{w_2}$ von A mit $A \cdot v = a\,v$ und $A \cdot w = b\,w$.

Aus $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 \\ av_2 \end{pmatrix}$ folgt $v_2 = av_1$ und $2v_1 + v_2 = av_2$.

Dies liefert $(a^2 - a - 2)\,v_1 = 0$. Der Fall $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ bringt keine nützliche Lösung.

Also bleibt $a^2 - a - 2 = 0$, was $a = 2$ oder $a = -1$ ergibt.

1. Fall: $a = 2$ liefert $v_2 = 2v_1$ und $2v_1 + v_2 = 2v_2$, also z.B. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Fall: $a = -1$ liefert $w_2 = -w_1$ und $2w_1 + w_2 = -w_2$, also z.B. $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Frage 5: Wie kann man nun die Darstellung $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$ berechnen?

Antwort 5: Da wir $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ haben wollen, müssen wir zuerst die Standardbasisvektoren $e_1 = \binom{1}{0}$ und $e_2 = \binom{0}{1}$ auf die Eigenvektoren v, w abbilden, d.h. wir haben $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Frage 6: Wie kann man S^{-1} invertieren?

Antwort 6: Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt $M^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ad-bc}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Für die Matrix $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$S = (S^{-1})^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Insgesamt folgt

$$A^n = S\, D^n\, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Frage 7: Welche Formel für z_n erhalten wir nun?

Antwort 7: Setzen wir in $\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} = A^{n-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein, so erhalten wir

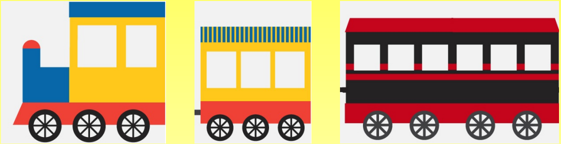
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 \\ 0 & (-1)^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\, 2^n + \frac{1}{3}\,(-1)^{n-1} \\ \frac{1}{3}\, 2^{n+1} + \frac{1}{3}\,(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also insgesamt $z_n = \frac{1}{3}\, 2^{n+1} + \frac{1}{3}\,(-1)^n$.

Probe: $z_5 = \frac{1}{3}\, 2^6 + \frac{1}{3}\,(-1)^5 = \frac{1}{3}\,(64 - 1) = 21$

Wir basteln Personenzüge

Diesmal sollen nur die ersten beiden Typen von Wagons erlaubt sein, also



Frage 8: Welche Rekursionsformel für die Zahl der Züge z_n ergibt sich jetzt?

Antwort 8: Für $n \geq 3$ gilt $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$ mit $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$. Die Zahlen z_n : $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ heißen die **Fibonacci-Zahlen**. In den Übungen entwickeln wir eine Formel für $F_n = z_{n-1}$.

2. Und was sich reimt, ist gut

So ein Schokoladenstück,
ja das ist reines Glück.
(Pumuckl)

Der indische Dichter und Mathematiker **Acharya Pingala** (ca. 3. Jhd. v. Chr.) schrieb ein Buch **Chandah Sutra**, welches die erste Abhandlung über Sanskrit Versmaße darstellt.

Das Werk ist ohne Erläuterungen schwer verständlich. Ein Buch **Mrta-Sanjivani** mit Kommentaren zu Pingala's Werk wurde ca. 975 n. Chr. von dem indischen Dichter und Mathematiker **Halayudha** verfasst.

Die Versmaße der Länge n

Jedes Versmaß (gr. **Metron**) besteht aus leichten Silben, genannt **laghu** und bezeichnet mit **L**, sowie schweren Silben, genannt **guru** und bezeichnet mit **G**.

Satz (Pingala's Algorithmus)

Der folgende Algorithmus konstruiert alle Versmaße der Länge n.

(1) *Beginne mit dem leeren Metron* **sunya** *(= "Leere").*

(2) *Füge zu jedem Metron der Länge $i-1$ zuerst* **G** *und dann* **L** *links dazu. Erhalte so alle Metra der Länge i.*

(3) *Fahre dann mit Schritt (2) für die nächste Länge i fort bis $i = n$ vollendet ist.*

Man erhält also die Metra **sunya**, **G**, **L**, **GG**, **LG**, **GL**, **LL**, **GGG**, etc.

(a) Unter anderem erfindet Pingala die Zahl **0**. Auch negative Zahlen werden erwähnt.

(b) Pingala wusste, dass es genau 2^n Versmaße der Länge n gibt.

(c) Im Gegensatz zu landläufigen Behauptungen hat Pingala aber nicht das Binärsystem erfunden, denn die Symbole **G** und **L** waren nicht Ziffern, deren Stelle eine Zweierpotenz symbolisierte.

(d) Pingala beschreibt auch einen Algorithmus, mit dem man zu einer Zahl j das j-te Metron der Länge n berechnen kann:

(1) Ist j ungerade, so schreibe **G** hin und ersetze j durch $j' = (j+1)/2$. Ist j gerade, so schreibe **L** hin und ersetze j durch $j' = j/2$.

(2) Fahre so mit j' fort. Füge die neuen Buchstaben immer *rechts* an, bis ein Metron der Länge n erreicht ist.

Die Versmaße mit genau k leichten Silben

Für die Zahl $\binom{n}{k}$ der Versmaße der Länge n mit genau k leichten Silben zeigt Pingala die folgenden Rekursionsformeln:

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (Symmetrie)

(3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Rekursionsformel)

Satz (Pingalas Formel)

Für $n \geq 2$ und $1 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\binom{n}{k} \;=\; \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}$$

Beweis: Wende die Rekursionsformel auf $\binom{n}{k}$ an, dann auf $\binom{n-1}{k}$, u.s.w., bis $\binom{k}{k} = 1$ erreicht ist. $\square$

Das Halayudha Dreieck

(1) In seinen Kommentaren zum Buch von Pingala ordnete **Halayudha** die **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ wie folgt an:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & & \\
 & & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & & \\
 & & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & \\
 & & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & & \\
 & \binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} & \\
\binom{8}{0} & & \binom{8}{1} & & \binom{8}{2} & & \binom{8}{3} & & \binom{8}{4} & & \binom{8}{5} & & \binom{8}{6} & & \binom{8}{7} & & \binom{8}{8}
\end{array}
$$

Dabei verglich er die Stufen des Dreiecks mit den Stufen des unvorstellbar hohen Weltenbergs **Meru**.

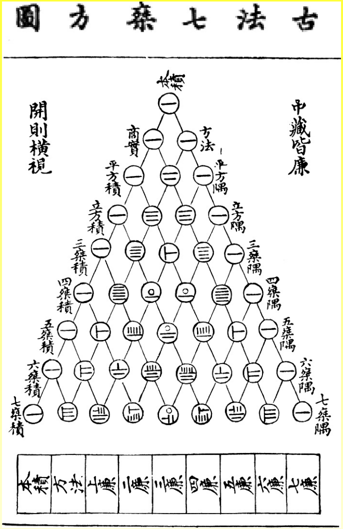
Der indische Astronom **Bhattotpala** (auch bekannt als **Utpala**) berechnete etwas später die ersten 17 Stufen des Dreiecks.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 7
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

(2) Kurz danach beschrieben in Persien die Mathematiker **Al-Karaji** (953-1029) und **Omar Chayyam** (1048-1131) das Dreieck und bewiesen einige seiner Eigenschaften. Deswegen ist es heutzutage im Iran als **Chayyam-Dreieck** bekannt.

(3) Im Jahr 1261 schrieb der chinesische Mathematiker **Yang Hui** (ca. 1238-1298) das Buch **Xiangjie Jiuzhang Suanfa** (Detaillierte Analyse der mathematischen Regeln), in dem er die ersten 8 Zeilen des Dreiecks angab und seine Erfindung dem Mathematiker **Jia Xian** (ca. 1050) zuschrieb.

Deshalb heißt es in China das **Yang-Hui Dreieck**.
Die erste überlieferte Abbildung des Yang-Hui Dreiecks ist aus dem 1303 erschienenen Buch **Ssu Yuan Yü Chien** (Jade-Spiegel der vier Unbekannten) von **Zhu Shijie** (1249-1314).


古法七乘方圖
開則橫視
中藏皆廉
本積
商實
方法
平方積
平方隅
立方積
立方隅
三乘積
三乘隅
四乘積
四乘隅
五乘積
五乘隅
六乘積
六乘隅
七乘積
七乘隅
本積
方法
上廉
二廉
三廉
四廉
五廉
六廉

3. Ab in die Matrix

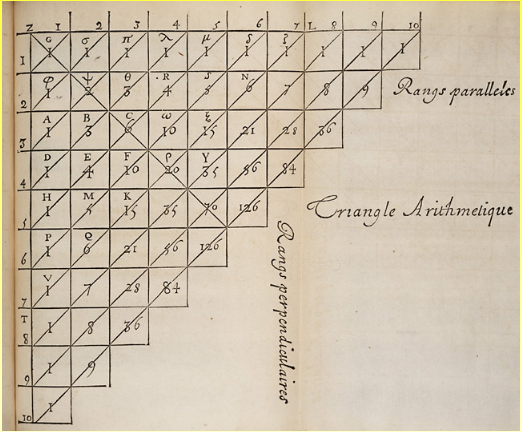
Ich bin nicht jung genug,
um alles zu wissen.
(Oscar Wilde)

Blaise Pascal schrieb 1654 das 36-seitige Buch **Traité du triangle arithmétique** (Abhandlung über das arithmetische Dreieck). Das Buch hat zwei Teile.

Teil 1 enthält 20 Formeln, die den Stand der Kenntnisse über Binomialkoeffizienten zusammenfassen.

Teil 2 enthält vier Anwendungen: auf figurierte Zahlen, auf Kombinationen, auf das **Problem der Punkte** und auf das Binomialtheorem.

Die Pascal-Matrix



Bei Pascal ist das Dreieck also eine Matrix $F = (f_k^n)_{n\geq 1,\, k\geq 0}$ mit den **figurierten Zahlen** als Einträgen $f_k^n = \binom{n+k-1}{k}$.

Eigenschaften der Pascal-Matrix

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 & 8 & 9 & \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 & & \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & & & \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & & & & \\
1 & 6 & 21 & 56 & 126 & & & & & \\
1 & 7 & 28 & 84 & & & & & & \\
1 & 8 & 36 & & & & & & & \\
1 & 9 & & & & & & & & \\
1 & & & & & & & & &
\end{pmatrix}$$

Formel 1: Die Zahlen f_k^n erfüllen die **Rekursionsformel**

$$f_k^n \ = \ f_k^{n-1} + f_{k-1}^n$$

mit den Anfangsbedingungen $f_0^n = f_k^1 = 1$ für $n \geq 1$ und $k \geq 0$.

Formel 2/3: $f_k^n = \sum_{i=1}^{n} f_{k-1}^i = \sum_{j=0}^{k} f_j^{n-1}$

Dies ist genau Pingalas Formel. Jede Zahl ist die Summe der Zahlen in der Spalte links daneben bis zur ihrer Reihe.

Formel 4: $f_k^n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} f_j^i$

Jede Zahl ist 1 plus die Summe des Rechtecks links und oberhalb ihrer Position.

Formel 5/6: (Symmetrie) $f_k^n = f_{n+1}^{k-1}$

Die Zahlen in der k-ten Zeile sind gleich denen in der $(k-1)$-ten Spalte.

Formel 7: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$

Die Summe der n-ten Diagonale ist das Doppelte der Summe der $(n-1)$-ten Diagonale.

Formel 8/9: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n = 1 + (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1})$

etc.

Anwendung auf die Summe von Potenzen

Gaußsche Summe: $1 + 2 + 3 + \cdots + n \;=\; \frac{1}{2}\, n\,(n+1)$

Quadratesumme: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \;=\; \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$

Satz (Pascals Potenzsummensformel)

$$(n+1)^k - (n+1) \;=\; k \sum_{i=0}^{n} i^{k-1} + \binom{k}{2} \sum_{i=0}^{n} i^{k-2} + \cdots + k \sum_{i=0}^{n} i$$

Beweis: $(n+1)^k - (n+1) = \sum_{i=0}^{n} (i+1)^k - \sum_{i=0}^{n} i^k - (n+1)$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[1 \cdot i^k + k \cdot i^{k-1} + \binom{k}{2} \cdot i^{k-2} + \cdots + k \cdot i + 1\right] - \sum_{i=0}^{n} i^k - (n+1)$$

$\square$

Ersetze n durch $n-1$ und schreibe die Formel für $k = 0, 1, \ldots$ auf:

$$\begin{aligned}
n &= n \\
n^2 &= n + \sum_{i=0}^{n-1} i \\
n^3 &= n + 3\sum_{i=0}^{n-1} i + 3\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
n^4 &= n + 4\sum_{i=0}^{n-1} i + 6\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + 4\sum_{i=0}^{n-1} i^3
\end{aligned}$$

Matrizenschreibweise: $\begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ \sum_{i=0}^{n-1} i \\ \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \end{pmatrix}$

Indem wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ invertieren, erhalten wir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Nun verwenden wir $\sum_{i=1}^{n} i^k = n^k + \sum_{i=0}^{n-1} i^k$, um Formeln für $\sum_{i=1}^{n} i^k$ zu erhalten. Dazu müssen wir die drei $-1/2$ in A^{-1} zu $+1/2$ abändern.

Insgesamt folgt

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n 1 \\ \sum_{i=1}^n i \\ \sum_{i=1}^n i^2 \\ \sum_{i=1}^n i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{pmatrix}$$

also $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}\, n(n+1)$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4} = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2, \text{ etc.}$$

Diese Herleitung mit Matrizenrechnung hätte Pascal sicher gefallen.

4. Backe, backe, Kuchen!

Wer will guten Kuchen backen,
der muss haben diese Sachen:
ein Dreieck von Pascal, k aus n binomial,
nimm mit der rechten Matrix mal.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 15 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Definition

Die Zahlen 1, 2, 4, 8, 15, 26, ... heißen die **Kuchenzahlen**.

Die n-te Kuchenzahl ist $K_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{1}{6}\,(n^3 + 5n + 6)$.

Satz

Zerteilt man einen (quaderförmigen) Kuchen mit n ebenen Schnitten in möglichst viele Teile, so ist K_n die maximale Zahl an Kuchenstücken, die man erhalten kann.

Beweis: Wir schließen **schrittweise über die Dimension** d.

$d = 0$**:** Einen Punkt kann man mit n Schnitten immer nur in 1 Stück zerteilen.

$d = 1$**:** Sei eine Gerade in der Zeichenebene gegeben. Wähle ein Koordinatensystem so, dass die Gerade nicht parallel zur x-Achse ist.

Jeder Schnitt liefert auf der Geraden einen Schnittpunkt. Jedes ausgeschnittene Geradenteil hat höchstens einen tiefsten Schnittpunkt. Genau n Geradenteil haben also einen der Schnittpunkte als tiefsten Punkt. Genau ein Geradenteil hat keinen tiefsten Punkt.

Es sind also maximal $n+1$ Geradenteile.

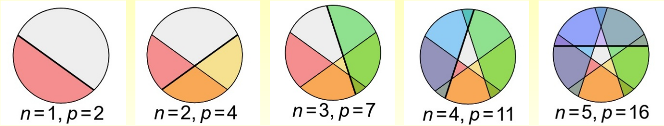
$d = 2$: Sei eine Ebene E im 3-dimensionalen Raum gegeben. Sie werde durch die Schnitte mit n anderen Ebenen in Teile zerlegt. Wähle das Koordinatensystem so, dass weder die Ebene E noch irgendwelche der n Schnittgeraden parallel zur (x, y)-Ebene sind.

Die n Schnittgeraden liefern maximal $\binom{n}{2}$ Schnittpunkte. Jeder der ausgeschnittenen Teile der Ebenen hat entweder einen oder keinen Schnittpunkt als (bzgl. der z-Koordinate) tiefsten Punkt.

Also haben maximal $\binom{n}{2}$ Ebenenteile einen Schnittpunkt als tiefsten Punkt.

Nun suchen wir noch die Zahl der Ebenenteile ohne tiefsten Punkt. Dazu schneiden wir die Ebene E mit einer Ebene, die parallel zur (x, y)-Ebene, aber tiefer als der tiefste Schnittpunkt ist. Wir erhalten eine Schnittgerade, die von den n Ebenen in maximal $n + 1$ Stücke zerlegt wird. Jedes dieser Stücke entspricht genau einem Teil der Ebene E ohne tiefsten Schnittpunkt.

Insgesamt gibt es maximal $P_n = \binom{n}{2} + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ Ebenenteile. Die Zahlen P_n heißen auch die **faule Kellner Zahlen** (engl. *lazy caterer numbers*), denn sie geben die Anzahl der Stücke an, in die ein Kellner einen Pfannkuchen mit n Schnitten maximal zerteilen kann.



$d = 3$**:** Der 3-dimensionale Raum werde durch n Ebenen in möglichst viele Teilbereiche zerlegt. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass keine der Ebenen und keine der Schnittgeraden parallel zur (x, y)-Achse ist.

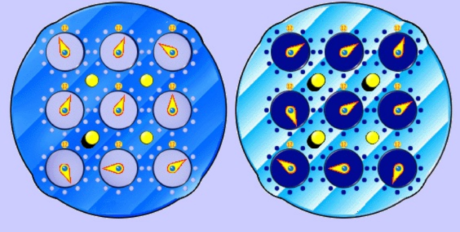
Je drei Ebenen schneiden sich i. A. in einem Punkt. Es gibt also maximal $\binom{n}{3}$ Schnittpunkte. Somit haben maximal $\binom{n}{3}$ Teilbereiche einen tiefsten Punkt.

Nun schneiden wir wieder mit einer Parallelebene E zur (x, y)-Ebene, die tiefer liegt als der tiefste Schnittpunkt. Die n Ebenen zerteilen E in maximal $\binom{n}{2} + (n+1) = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ Teilflächen. Jede von ihnen entspricht eineindeutig einem Teilbereich des Raums ohne tiefsten Punkt.

Insgesamt gibt es also maximal $K_n = \binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0}$ Teilbereiche in die der 3-dimensionale Raum von n Ebenen zerlegt wird.

5. Ist es wirklich schon so spät?

Ich mag Deadlines.
Ich mag dieses „Wusch“ Geräusch, das sie machen,
wenn sie vorbeisausen.
(Douglas Adams)



Rubiks Uhr (engl. *Rubik's clock*) ist ein Permutationspuzzle.

Wie funktioniert Rubiks Uhr?

(1) Es gibt insgesamt 18 Uhren. An jeder Ecke ist die Uhr an der Oberseite an die entsprechende Uhr der Unterseite gekoppelt.

(2) Man kann die Uhren an den vier Ecken stundenweise drehen.

(3) Es gibt vier Knöpfe. Ist ein Knopf nicht gedrückt, so sind die vier umliegenden Uhren auf dieser Seite aneinander gekoppelt.

(4) Dreht man den Zeiger einer Uhr, so durchläuft seine Position die Zahlen **modulo 12**. Somit es ist gleich, ob man 15-mal weiter dreht oder dreimal. Eine Uhrenstellung ist also ein Element von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

Mathematische Modellierung mit Matrizen

Eine Stellung des Puzzles wird also beschrieben durch eine 3×6 Matrix von Elementen aus $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right)$$

Die Matrix (a_{ij}) beschreibt die Stellung der Uhren der Oberseite und die Matrix (b_{ij}) beschreibt die Stellung der Uhren auf der Unterseite.

Allerdings sind nicht alle $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^{18}$ Stellungen möglich, denn an den Ecken sind ja je zwei Uhren gekoppelt.

Wer hat an der Uhr gedreht?

Dreht man die obere Uhr an einer Ecke um eine Stunde weiter, so entspricht dies der Addition einer 3×6 Matrix zur aktuellen Stellung.

Beispiel eines Zuges: Die Knopfstellung sei $\binom{D\ D}{U\ D}$ und wir drehen links unten.

Dies entspricht der Addition der Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(Beachte, dass die Unterseite durch das Umdrehen gespiegelt dargestellt wird.)

Ist es wirklich schon so spät?

(1) Da die oberen und unteren Uhren einer Ecke aneinander gekoppelt sind, gibt es genau 14 unabhängige Uhren.

(2) Um das Puzzle zu lösen, brauchen wir Zugfolgen, die jeweils um genau eine Stunde weiterdrehen.

(3) Stellen wir einen Zug durch die Position der Knöpfe dar, wobei die zu drehende Ecke rot angegeben wird, so gibt es bis auf Drehungen des Puzzles die folgenden fünf Typen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} & U \\ D & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & D \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & D \end{pmatrix}$$

Stimmt es, dass es sein muss?

Folgende drei Zugfolgen lösen das Puzzle:

$$\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & U \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} U & U \\ U & \mathbf{D} \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{D} & U \\ U & D \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{D} & U \\ D & U \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} U & U \\ \mathbf{D} & U \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} D & \mathbf{U} \\ U & U \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{U} & U \\ U & U \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} D & \mathbf{U} \\ U & U \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ist für heute wirklich Schluss?

Heute ist nicht alle Tage,
ich komm wieder, keine Frage.
(Paulchen Panther)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!