

Fundamentalklassen nulldimensionaler Schemata

Guntram Hainke

Diplomarbeit im Studiengang Mathematik
Universität Dortmund

Mai 2005

Betreuer: Prof. M. Kreuzer

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
1 Grundlegendes über nulldimensionale Schemata	5
1.1 Konventionen	5
1.2 Der Koordinatenring	6
1.3 Spezielle Klassen von Punktmenge	14
2 Der Modul der Kähler-Differentialformen	17
2.1 Allgemeine Betrachtungen	17
2.2 Differentialformen für Punktmenge	20
2.3 Die erste infinitesimale Umgebung von \mathbb{X}	23
3 Höhere Differentialformen	27
4 Reguläre Differentialformen	39
4.1 Lokale Kohomologie	39
4.2 Reguläre Differentialformen nach Rosenlicht	44
5 Die Fundamentalklassen-Abbildung	47
6 Der Jacobi-Modul	52
Literaturverzeichnis	57
A Dokumentation verwendeter Programme	61

Vorwort

Ob man lokal noethersche Schemata, symplektische Mannigfaltigkeiten oder projektive Ebenen betrachtet — nahezu jede geometrische Theorie verwendet das Konzept des Punktes als grundlegenden Baustein. Alle höherdimensionalen Objekte setzen sich aus i.A. unendlich vielen Punkten zusammen, doch auch nur endlich viele Punkte können interessante Eigenschaften aufweisen.

In der algebraischen Geometrie kann man Kubiken anhand ihrer Wendepunkte klassifizieren. Jede elliptische Kurve ist mit einer endlichen Menge von Punkten ausgezeichnet, den Torsionselementen bzgl. der Gruppenstruktur. Generische Hyperebenenschnitte einer nichtausgearteten Raumkurve liefern endliche Punkt-mengen, mit denen man in der Castelnuovo-Theorie z.B. Schranken für das Geschlecht der Kurve findet. Daneben besitzen diese Punkt-mengen unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen die interessante geometrische Eigenschaft, in uniformer Lage zu sein ([28] S. 197). Schließlich basiert Nagatas Gegenbeispiel zu Hilberts 14. Problem ([34]) auf der Berechnung der Hilbertfunktion eines (nicht reduzierten) nulldimensionalen Schemas.

Dies ist Motivation genug, sich mit „nulldimensionalen Unterschemata projektiver Räume“ zu beschäftigen, die als reduziert vorausgesetzt werden. Betrachtet wird also eine Menge \mathbb{X} von s Punkten im $\mathbb{P}^n(k)$, die entweder durch Koordinaten oder ihr Verschwindungsideal gegeben sind. Unter analytischen Gesichtspunkten, d.h. wenn k ein topologischer Körper ist und man \mathbb{X} als topologische Mannigfaltigkeit betrachtet, läßt sich nicht viel konstatieren außer der Tatsache, daß \mathbb{X} diskret ist — \mathbb{X} besitzt also wenig *intrinsische* Geometrie. *Extrinsisch* besehen eröffnet sich ein Füllhorn an interessanten dazu assoziierten algebraischen Objekten. Das elementarste ist vielleicht der Koordinatenring $R_{\mathbb{X}}$ von \mathbb{X} mit seiner Hilbertfunktion; genauere Informationen liefert eine freie Auflösung von $R_{\mathbb{X}}$. Aber auch diese Invariante ist grob in dem Sinne, daß Punkt-mengen, die intuitiv als verschieden angesehen werden, gleiche freie Auflösungen des Koordinatenringes besitzen.

Der Schlüssel zur Konstruktion neuer Invarianten liegt in der Erkenntnis, daß der Koordinatenring ein eindimensionaler standardgraduierter Cohen-Macaulay-Ring ist. Wie das Lemma von Nakayama für lokale Ringe ebenso wie für stan-

dardgraduierte Ringe gilt, gibt es viele Sätze in der lokalen Algebra, die eine Entsprechung im graduierten Fall haben. Unter einem *verallgemeinerten lokalen Ring* versteht man einen positiv graduierten Ring $R = R_0 \oplus R_1 \oplus \dots$ mit einem lokalen noetherschen Ring R_0 , sodaß R eine endlich erzeugte R_0 -Algebra ist. Dieser Begriff hat genau die nötige Allgemeinheit, um die jeweiligen lokalen bzw. graduierten Aussagen als Spezialfälle zu enthalten, doch leider sind in der Literatur die Ergebnisse meist nur für lokale Ringe formuliert.

Nun ist der lokale Ring einer Kurve in einem Punkt gerade ein eindimensionaler lokaler Ring; besonders interessant sind dabei die lokalen Ringe in Singularitäten. Dies legt es nahe zu untersuchen, inwieweit Ergebnisse der weitentwickelten Theorie der Kurvensingularitäten Entsprechungen im Studium von Punktmen- gen haben.

Die klassische Theorie der Differentialformen für glatte Kurven wird im singulären Fall durch das Studium des Moduls der Kähler-Differentialformen Ω^1 ersetzt. Exemplarisch für die dort auftretenden Fragestellungen ist die (trotz partieller Resultate immer noch offene) Vermutung von Berger, wonach ein eindimensionaler lokaler Ring R genau dann regulär ist, wenn $\Omega_{R/k}^1$ torsionsfrei ist.

In den Artikeln [22] und [36], die Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit sind, werden u.a. Kähler-Differentialformen für Punktmen- gen betrachtet. Diese liefern wie erhofft eine feinere Invariante als die freie Auflösung allein. Doch auch hier endet die Geschichte nicht — wiederum gibt es Punktmen- gen, die intuitiv als nicht gleich angesehen werden und dennoch von freier Auflösung und Kähler-Differentialformen allein nicht unterschieden werden können. Es gilt also, neue algebraische Objekte zu Punktmen- gen zu assoziieren und zu untersuchen, wie sich die Geometrie darin widerspiegelt. Ein Schritt in diese Richtung besteht darin, auch höhere Differentialformen zu betrachten.

Neben Ω^1 ist der Modul der regulären Differentialformen ω (im Sinne von Rosenlicht bzw. im Sinne von Grothendieck) für singuläre Kurven wichtig. Es gibt eine kanonische Abbildung $c : \Omega^1 \rightarrow \omega$, die zum Vergleich der beiden Modulen verwendet wird. Kern und Cokern von c liefern dabei beispielsweise Aussagen über die Regularität in einem Punkt, über die Quasihomogenität der Kurve oder ihre Liaisonklasse([29], [32]).

Die Konstruktion eines Pendantes für c , der sogenannten Fundamentalklassen- Abbildung, für Punktmen- gen gibt schließlich dieser Arbeit den Titel. Auch hier können Ergebnisse aus dem lokalen Fall übertragen werden, die die algebraischen Aspekte von Kern und Cokern mit der Geometrie der Punktmenge in Relation bringen. Anliegen dabei ist es stets, alle vorkommenden Abbildungen, Isomorphismen und Präsentationen etc. so explizit wie möglich zu machen, um eine Implementation der Ergebnisse für Computer-Experimente zu vereinfachen. Da der geometrische Aspekt im Vordergrund steht, wird als Grundkörper stets ein

algebraisch abgeschlossener Körper \bar{k} der Charakteristik 0 angenommen, betrachtet werden für $k \subseteq \bar{k}$ endliche Mengen $X \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ k -rationaler Punkte.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Im einführenden ersten Kapitel werden Grundtatsachen über den Koordinatenring R_X einer Punktmenge X zusammengestellt, sind doch alle im weiteren Verlauf konstruierten Objekte Moduln über diesem Ring. Daneben werden algebraische wie geometrische Konzepte eingeführt, die vom Ringbegriff abgeleitet werden. Weiter werden einige wichtige Klassen von Punktmenge angegeben, die diese Eigenschaften aufweisen, wie zum Beispiel arithmetisch Gorenstein zu sein oder sich in uniformer Lage zu befinden.

Im zweiten Kapitel werden Moduln von Kähler-Differentialformen zunächst ringtheoretisch eingeführt und allgemein betrachtet. Für Punktmenge wichtig sind sogenannte holomorphe, ganze und meromorphe Differentialformen, deren Struktur anschließend geklärt wird. Eine besondere Rolle kommt dabei dem Torsionsuntermodul der holomorphen Differentialformen zu. Daneben ist, zumindest auf dem Level von Hilbert-Funktionen, die Untersuchung von Differentialformen gleichbedeutend mit der von Doppelpunktschemata, einem weiteren klassischen Gebiet.

Ein besseres Verständnis von 1-Formen liefert die Betrachtung von höheren Differentialformen, wie sie im folgenden Kapitel geschieht. Die Tatsache, daß der assoziierte deRham-Komplex im Wesentlichen exakt ist, liefert dabei vielfältige Konsequenzen. Welche neuen Aspekte die Hilbertfunktionen von höheren Differentialformen liefern, wird anhand von vielen Beispielen gezeigt.

Das vierte Kapitel behandelt die äquivalenten Definitionen von regulären Differentialformen im Sinne von Grothendieck bzw. im Sinne von Rosenlicht. Die Interpretation dieser Formen als kanonischer Modul von R_X erlaubt den weiteren Einsatz klassischer Resultate.

Die Konstruktion der Fundamentalklassen-Abbildung bildet den Inhalt des fünften Kapitels. Analog zum lokalen Fall können wir damit holomorphe und reguläre Differentialformen vergleichen. Der Kern dieser Abbildung ist gerade der Torsionsuntermodul der holomorphen Differentialformen, wie wir ihn im zweiten Kapitel behandelt haben. Der Cokern der Abbildung, der sogenannte Jacobi-Modul, ist schließlich Inhalt des sechsten Kapitels. Wie man aus der Modulstruktur der regulären Differentialformen geometrische Informationen herauslesen kann, ist dieses auch für den Jacobi-Modul möglich.

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders danke ich Herrn Prof. M. Kreuzer für die Aufgabenstellung und die gute Betreuung und Dr. A. Kehrein für manche hilfreiche Diskussion.

Kapitel 1

Grundlegendes über nulldimensionale Schemata

In diesem Kapitel geben wir nach dem Treffen einiger Konventionen eine Einführung in die allgemeine Theorie nulldimensionaler Schemata. Zentrales Objekt dabei ist der Koordinatenring $R_{\mathbb{X}}$, für den allgemeine ringtheoretische Begriffe einfach zu beschreiben sind. Unter geometrischen Gesichtspunkten ist dabei beispielsweise der ganze Abschluß S von $R_{\mathbb{X}}$ interessant. Wichtig für die Dualitätstheorie ist das Konzept des Gorensteinringes; exemplarisch dafür ist der Koordinatenring eines vollständigen Durchschnittes.

In einem weiteren Abschnitt werden verschiedene Klassen von Punktmengen eingeführt, die besondere algebraische Eigenschaften haben. So ist das Verschwindungsideal einer Linearkonfiguration beispielsweise die Liftung eines Lex-Segment-Ideals. Schließlich werden geometrische Begriffe behandelt, die über die Hilbertfunktion definiert werden.

1.1 Konventionen

Im folgenden seien alle betrachteten Ringe kommutativ mit Eins. Ein Ring R heißt \mathbb{Z} -graduirt, wenn es additive Untergruppen R_i von R gibt mit $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ und $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$. Ist zusätzlich $R_i = 0$ für $i < 0$, so heißt R positiv graduirt. Ist k ein Körper, so nennen wir einen Vektorraum V über k graduirt, wenn es Unterräume $(V_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ gibt mit $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$.

Sind R_1, \dots, R_k graduierte Ringe, so ist $S := R_1 \times \dots \times R_k$ graduirt mit $S_i = \bigoplus_j (R_j)_i$.

Sei k ein Körper und $P = k[x_0, \dots, x_n]$. Die Standardgraduierung von P ist

gegeben durch

$$P_i = \left\{ \sum_j \alpha_j x_1^{a_{j1}} \cdots x_n^{a_{jn}} \mid \sum_k a_{jk} = i \forall j \right\}.$$

Für ein homogenes Ideal $I \neq 0$ von P bezeichnet $\alpha(I) := \min\{i : (I)_i \neq 0\}$ den Initialgrad von I . Für $f \in P$ sei $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ die gewöhnliche partielle Ableitung nach x_i . Das Bild von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in einem Restklassenring P/I wird mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ bezeichnet. Die Terminologie für Konzepte aus der Computeralgebra wird wie in [12],[13] verwendet.

1.2 Der Koordinatenring

Sei im folgenden k ein Körper der Charakteristik 0 und \mathbb{P}^n der n -dimensionale projektive Raum über k . Gegenstand unserer Untersuchung sind nulldimensionale reduzierte Unterschemata des \mathbb{P}^n , d.h. endliche Mengen von Punkten. Ist $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\}$, so bezeichnet $I_{\mathbb{X}}$ das Verschwindungsideal in $P := k[x_0, \dots, x_n]$ und $R := R_{\mathbb{X}} := P/I_{\mathbb{X}}$ den Koordinatenring von \mathbb{X} . Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß \mathbb{X} nicht ausgeartet ist, d.h. nicht in einer Hyperebene enthalten ist. Bezüglich der Standardgraduierung von P ist $I_{\mathbb{X}}$ ein homogenes Ideal und damit R ein graduierter P -Modul.

Da k unendlich ist, gibt es eine Hyperebene $E = V(l_0)$, die keinen Punkt von \mathbb{X} enthält. Nach einem linearen Koordinatenwechsel können wir annehmen, daß diese durch $E = V(x_0)$ gegeben ist. Damit haben die Punkte von \mathbb{X} die Form $P_i = (1 : p_{i1} : \dots : p_{in})$. Für ein homogenes $f \in R_d$ setzen wir so

$$f(P_i) := f(1, p_{i1}, \dots, p_{in}).$$

Für \mathbb{X} gibt es Analoga zu den Lagrange- und Hermite-Grundpolynomen.

Definition 1.1. *Ein homogenes Element $f \in R_d$ heißt **Separator** (von P_i), wenn gilt $f_i(P_j) = \delta_{ij}$. Ist f_i vom kleinsten Grad mit dieser Eigenschaft, so heißt f_i **minimaler Separator**. Wir setzen*

$$\sigma := \sigma_{\mathbb{X}} := \max\{\deg f : f \text{ ist minimaler Separator}\} - 1.$$

Separatoren kann man explizit angeben. Für $j \neq i$ gibt es ja $k_{ij} \in \{1, \dots, n\}$ mit $p_{ik_{ij}} \neq p_{jk_{ij}}$. Für

$$f'_i := \prod_{j \neq i} (x_{k_{ij}} - p_{jk_{ij}} x_0)$$

und $f_i := \frac{1}{f'_i(P_i)} f'_i$ gilt dann $f_i(P_j) = \delta_{ij}$, σ ist also durch $s - 2$ beschränkt. Der Name Separator erklärt sich dadurch, daß für $\mathbb{Y} := \mathbb{X} \setminus \{P_i\}$ das Verschwindungsideal von \mathbb{Y} in $R_{\mathbb{X}}$ von einem minimalen Separator f_i von P_i erzeugt wird,

f_i „trennt“ also \mathbb{Y} von \mathbb{X} .

Polynome, die an den Punkten verschwinden und deren Ableitungen dort gewisse vorgeschriebene Werte annehmen, kann man auch explizit angeben.

Proposition 1.2. *Für $k = 1, \dots, n$ gibt es Formen $g_{ik} \in I_{2\sigma+3}$ mit $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m} = 0$ für $m \neq k, m \neq 0$ und $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_k}(P_j) = \delta_{ij}$. Dabei bezeichnet $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m}$ das Bild von $\frac{\partial g_{ik}}{\partial X_m}$ in $R_{\mathbb{X}}$.*

BEWEIS. Für $P_i = (1 : p_{i1} : \dots : p_{in})$ betrachte $g_{ik} := (x_k - p_{ik}x_0)F_i^2 \in I_{\leq 2\sigma+3}$ für ein Urbild F_i eines minimalen Separators von P_i . Für $m \neq 0$ gilt dann

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_m} = \delta_{km}f_i^2 + (x_k - p_{ik}x_0) \cdot 2f_i \cdot \frac{\partial F_i}{\partial x_m} = \delta_{km}f_i^2,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Für einen graduierten Ring R ist der homogene Quotientenkörper definiert als maximale nichttriviale Lokalisierung bei homogenen Elementen, also

$$Q^h(R) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in R, g \text{ homogener Nicht-Nullteiler} \right\}.$$

Für $R = R_{\mathbb{X}}$ erhalten wir eine explizite Beschreibung.

Proposition 1.3. *a) $f \in R_d$ ist genau dann ein Nicht-Nullteiler (NNT), wenn gilt $f(P_i) \neq 0$ für $i = 1, \dots, s$. Insbesondere ist also x_0 linearer NNT.*

b) Für den homogenen Quotientenkörper von R gilt

$$Q^h(R) \cong K[T_1, T_1^{-1}] \times \dots \times K[T_s, T_s^{-1}].$$

Zudem ist bereits $Q^h(R) = R_{x_0}$.

c) Der ganze Abschluß von R in $Q^h(R)$ ist isomorph zu

$$S := K[T_1] \times \dots \times K[T_s].$$

Die Inklusion $\varphi : R \hookrightarrow S$ ist dabei für homogenes $f \in R_d$ explizit gegeben durch

$$\varphi(f) = (f(P_1)T_1^d, \dots, f(P_s)T_s^d).$$

BEWEIS.

- a) Ist $f(P_i) = 0$, so gilt $ff_i = 0$, also ist f Nullteiler. Ist f andererseits ein homogener Nullteiler, so gibt es auch ein homogenes $g \neq 0$ mit $fg = 0$, also $f(P_i)g(P_i) = 0$ für $i = 1, \dots, s$. Da $g \neq 0$, gibt es ein i_0 mit $g(P_{i_0}) \neq 0$, also ist $f(P_{i_0}) = 0$.

b) , c) Für das Verschwindungsideal \mathfrak{p}_i von P_i in P gilt

$$\mathfrak{p}_i = \langle x_1 - p_{i1}x_0, \dots, x_n - p_{in}x_0 \rangle.$$

Da $I_{\mathbb{X}} = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s$, gibt es eine Injektion

$$\varphi : P/I_{\mathbb{X}} \hookrightarrow S := P/\mathfrak{p}_1 \times \dots \times P/\mathfrak{p}_s,$$

die komponentenweise gegeben ist durch $f + I_{\mathbb{X}} \mapsto f + \mathfrak{p}_i$. Aus der Gestalt von \mathfrak{p}_i folgt $P/\mathfrak{p}_i \cong k[T_i]$, wobei T_i das Bild von x_0 ist. Offenbar ist

$$Q^h(S) \cong k[T_1, T_1^{-1}] \times \dots \times k[T_s, T_s^{-1}],$$

damit ist S ganzabgeschlossen in $Q^h(S)$. Aufgrund der Beziehung

$$R_{x_0} \subseteq Q^h(R) \hookrightarrow Q^h(S)$$

reicht es für die verbleibenden Behauptungen zu zeigen, daß $R_{x_0} = Q^h(S)$. Da für die Bilder von x_0 und Separatoren f_i vom Grad d_i unter φ gilt

$$\varphi(x_0) = (T_1, \dots, T_s) \text{ und } \varphi(f_i) = (0, \dots, 0, T_i^{d_i}, 0, \dots, 0)$$

ist dies klar. □

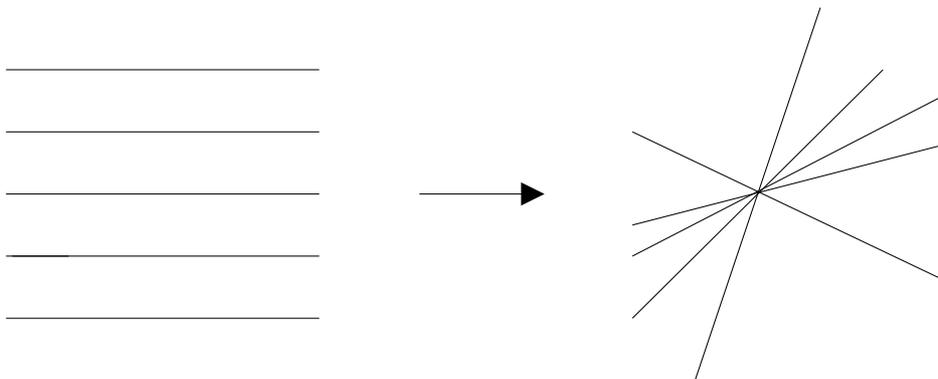
Bemerkung 1.4. Analog zum Chinesischem Restsatz zeigt man, daß für

$$J := \langle (y-1) \cdot \dots \cdot (y-s) \rangle \subseteq k[x, y]$$

gilt

$$k[x, y]/J \cong k[T_1] \times \dots \times k[T_s].$$

Allerdings ist dieser Isomorphismus kein Isomorphismus graduierter Ringe, wenn man $k[x, y]$ mit der Standardgraduierung versieht, da ja J nicht homogen ist. Interpretiert man S als Koordinatenring einer affinen algebraischen Varietät \mathbb{S} , vermittelt die Inklusion $\varphi : R \rightarrow S$ einen surjektiven Morphismus $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{Y}$ für den zu \mathbb{X} gehörigen affinen Kegel \mathbb{Y} .



Der Morphismus $\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{Y}$ für ein fünfpunktiges Schema $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$.

Eine erste Invariante ist die Hilbertfunktion von \mathbb{X} , die gegeben ist durch

$$\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(t) := \mathrm{HF}_{R_{\mathbb{X}}}(t) := \dim_k(R_{\mathbb{X}})_t.$$

Als Castelnuovo-Funktion wird die erste Differenzenfunktion

$$\Delta \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(t) := \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(t) - \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(t - 1)$$

bezeichnet. Der Initialgrad von \mathbb{X} ist definiert als $\alpha_{\mathbb{X}} := \alpha(I_{\mathbb{X}})$; eine Punktmenge \mathbb{X} ist also genau dann nicht ausgeartet, d.h. liegt in keiner Hyperebene, wenn $\alpha_{\mathbb{X}} \geq 2$.

Die Werte der Hilbertfunktion ermöglicht eine einfache Beschreibung.

Proposition 1.5. *Sei $\mathrm{HF} = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}$ die Hilbertfunktion von \mathbb{X} .*

a) *Es gilt $\mathrm{HF}(i) = \mathrm{HF}_{\mathbb{P}^n}(i) = \binom{n+i}{i}$ für $i = 0, \dots, \alpha_{\mathbb{X}} - 1$.*

b) *Das Wachstumsverhalten der Hilbertfunktion ist gegeben durch*

$$\mathrm{HF}(0) < \mathrm{HF}(1) < \dots < \mathrm{HF}(\sigma_{\mathbb{X}}) < \mathrm{HF}(\sigma_{\mathbb{X}} + 1) = s$$

und $\mathrm{HF}(i) = s$ für $i \geq \sigma_{\mathbb{X}} + 1$.

BEWEIS. Die erste Aussage ist gerade die Definition von $\alpha_{\mathbb{X}}$. Die Multiplikation mit x_0 ist eine injektive lineare Abbildung da x_0 NNT ist, also ist die Hilbertfunktion monoton wachsend. Die Inklusion $R \hookrightarrow S$ und $\mathrm{HF}_S(i) = s$ für $i \geq 0$ zeigt, daß $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}$ durch s beschränkt ist und $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = s$ für $i \geq \sigma + 1$.

Es bleibt zu zeigen, daß die Hilbertfunktion im Intervall $\{0, \sigma + 1\}$ strikt wächst. Sei also $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i + 1)$, dann gilt $x_0 \cdot R_i = R_{i+1}$. Für $f \in R_{i+2}$ gibt es gewisse $g_j = x_0 g'_j \in R_{i+1}$ mit $f = \sum x_j g_j = x_0 \sum x_j g'_j \in x_0 R_{i+1}$, also gilt $R_{i+2} = x_0 R_{i+1}$ und damit induktiv $R_j = x_0^{j-i} R_i$ für $j \geq i$. Nun ist $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(j) = s$ für $j \geq \sigma + 1$, also auch $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = s$. Damit gibt es für alle Punkte Separatoren in R_i , also ist nach Definition $i \geq \sigma + 1$. \square

Der Regularitätsindex der Hilbertfunktion, d.h. das minimale i , für das der Wert der Hilbertfunktion mit dem Hilbertpolynom übereinstimmt, ist also gerade $\sigma_{\mathbb{X}} + 1$. Mit anderen Worten: Die Interpolationsaufgabe, ein homogenes Polynom f zu finden mit $f(P_i) = a_i$ für gegebene $a_i \in k$, kann vollständig mit Formen vom Grad $\sigma + 1$ gelöst werden, aber nicht mit Formen kleineren Grades.

Für spätere Anwendungen wichtig ist der letzte Zuwachs der Castelnuovo-Funktion $\Delta_{\mathbb{X}} := \Delta \mathrm{HF}(\sigma + 1)$.

An der Hilbertfunktion kann man also die Anzahl der Punkte ablesen: Die Multiplizität des Hilbertpolynoms (der Grad des Schemas) ist gerade s . Ein Indiz, daß diese Invariante recht grob ist, liefert folgende Proposition.

Proposition 1.6. *Es gibt eine nichtleere Zariski-offene Teilmenge $U \subset (\mathbb{P}^n)^s$, so daß für alle $(P_1, \dots, P_s) \in U$ gilt: Für $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\} \subseteq \mathbb{P}^n$ gilt*

$$\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = \min\{s, \mathrm{HF}_{\mathbb{P}^n}(i)\}.$$

Punktmenge mit der angegebenen Hilbertfunktion nennt man „generische Punkte“.

BEWEIS. Sei $b := \min\{i : s \leq \mathrm{HF}_{\mathbb{P}^n}(i)\}$ und bezeichne \mathbb{T}_i die Menge aller Terme vom Grad i in P . Sei $(P_1, \dots, P_s) \in (\mathbb{P}^n)^s$ und $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\}$. Für

$$M_i := (t(P_j))_{t \in \mathbb{T}_i, j=1, \dots, s}$$

gilt offenbar $\mathrm{rank} M_i = \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i)$. Nun gilt für eine nichtleere Zariski-offene Menge U , daß für $(P_1, \dots, P_s) \in U$ und $i = 0, \dots, b$ die Matrix M_i maximalen Rang hat. Eine lineare Abhängigkeit der Zeilen von M_i ist nämlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden eines maximalen Minors, die maximalen Minoren aber sind endlich viele von Null verschiedene polynomiale Funktionen in den P_i . Also hat $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i)$ die angegebene Gestalt für $i = 0, \dots, b$, und da $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(b) = s$ folgt auch $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(i) = s$ für $i \geq b$. \square

Bemerkung 1.7. Die Verwendung der im Beweis konstruierten Matrizen M_i im Buchberger-Möller-Algorithmus (vgl. etwa [13] ch. 6.3) liefert einen effizienten Weg zur Berechnung des Verschwindungsideales von Punktmenge, die explizit durch die Koordinaten ihrer Punkte gegeben sind.

Bemerkung 1.8. An der Hilbertfunktion liest man ab, daß R Krulldimension 1 hat. Die Tiefe von R , definiert als maximale Länge einer P -regulären Folge für R , beträgt ebenfalls 1: Sie ist mindestens 1, da x_0 NNT ist. Sie ist auch durch 1 beschränkt, da für einen (nicht notwendigerweise homogenen) Nichtnullteiler $l \in P$ die k -Vektorraumdimension von R/lR endlich ist. R ist also ein eindimensionaler Cohen-Macaulay-Ring.

Wichtig in diesem Zusammenhang sind die Begriffe des Cohen-Macaulay-Typs (CM-Typ) und des Gorenstein-Rings:

Definition 1.9. a) Sei $l \in R_1$ ein Nicht-Nullteiler und $A := R/lR$. Dann heißt A **Artinsche Reduktion** von R .

b) Sei \mathfrak{m}' das maximale homogene Ideal von A . Dann heißt

$$\mathrm{soc} A := \mathrm{Ann}_A \mathfrak{m}' = \{a \in A \mid \mathfrak{m}' \cdot a = 0\}$$

der **Sockel** von A .

c) Der **Cohen-Macaulay-Typ** von R ist definiert als

$$\text{CM}(R) := \dim_k \text{soc } A.$$

R wird **Gorensteinring** genannt, wenn gilt $\text{CM}(R) = 1$. \mathbb{X} heißt **arithmetisch Gorenstein**, wenn $R_{\mathbb{X}}$ Gorensteinring ist.

Die Unabhängigkeit der Definition vom gewählten NNT sieht man durch eine Basistransformation. Der Name „Artinsche Reduktion“ erklärt sich dadurch, daß R/lR ein Artinscher Ring ist.

Einige der eingeführten Begriffe sowie die Stärke der Gorenstein-Bedingung verdeutlicht folgende Proposition.

Proposition 1.10. a) Für den Sockel von A gilt $\text{soc } A = \{a \in A \mid A_1 \cdot a = 0\}$.

b) Ist f Separator, so ist $f + x_0R$ Element des Sockels von $A = R/x_0R$. Zudem gilt $0 \neq A_{\sigma+1} \subseteq \text{soc } A$.

c) Ist \mathbb{X} arithmetisch Gorenstein, so gilt für die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X}

$$\Delta \text{HF}_{\mathbb{X}}(t) = \Delta \text{HF}_{\mathbb{X}}(\sigma + 1 - t)$$

und damit $\text{HF}_{\mathbb{X}}(t) = s - \text{HF}_{\mathbb{X}}(\sigma - t)$. Insbesondere ist also $\Delta_{\mathbb{X}} = 1$.

BEWEIS.

- a) Dies ist klar, da A_1 das Ideal \mathfrak{m}' erzeugt.
- b) Das Rechnen im ganzen Abschluß S von R (1.3) liefert für einen Separator f_j von P_j die Gleichung $x_i \cdot f_j = p_{ji}x_0 f_j$, woraus die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung ist klar.
- c) Die Castelnuovo-Funktion von \mathbb{X} ist gerade die Hilbertfunktion von A . Wir zeigen, daß die Multiplikationsabbildung

$$\mu_i : A_i \times A_{\sigma+1-i} \rightarrow A_{\sigma+1} \cong k$$

nicht-ausgeartet ist. Damit folgt dann $\dim_k A_i = \dim_k A_{\sigma+1-i}$ und so die erste Behauptung, woraus die zweite durch Aufsummieren folgt.

In der Tat gilt für $f \in A_{\sigma} \setminus \{0\}$, daß $A_1 \cdot f \neq 0$ nach Definition des Sockels. Sei nun $i < \sigma$ und $f \in A_i$ mit $A_{\sigma+1-i} \cdot f = 0$. Sei $g \in A_{\sigma-i}$ beliebig. Aus $(A_1 g)f = A_1(gf) = 0$ folgt $gf \in \text{soc } A \cap A_{\sigma} = \{0\}$, also $A_{\sigma-i} \cdot f = 0$ und damit induktiv $A_1 \cdot f = 0$, also $f \in \text{soc } A \cap A_i = \{0\}$, was zu zeigen war.

□

Eine Abschwächung des Gorensteinbegriffes ist der des Level-Schemas:

Definition 1.11. \mathbb{X} heißt *Level-Schema*, wenn gilt $\text{soc } A = A_{\sigma+1}$.

Feiner als die Hilbertfunktion ist die minimale graduiert-freie Auflösung von $R_{\mathbb{X}}$: Nach Hilberts Syzygiensatz ([1] 19.7) gibt es eine exakte Sequenz graduierter P -Moduln

$$0 \longrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\varphi_1} R \longrightarrow 0.$$

Hierbei sind die F_i graduiert-freie P -Moduln der Form $F_i \cong \bigoplus_{j=1}^{\beta_i} P(-\alpha_{ij})$. Dabei beträgt die Länge $n - 1$ aufgrund der Formel von Auslander-Buchsbaum im graduierten Fall ([1] ex. 19.8), da R die Tiefe 1 hat.

Die Auflösung ist eindeutig in dem Sinne, daß, wenn nach einer Basiswahl in der Matrizendarstellung von φ_i kein Eintrag aus k stammt ($i = 1, \dots, n - 1$), die *graduerten Bettizahlen* β_i und die *Gradverschiebungen* α_{ij} eindeutig sind.

Graduierte Ringe mit gleicher freier Auflösung haben die gleiche Hilbertfunktion, da diese additiv auf kurzen exakten Sequenzen ist. Freie Auflösungen beinhalten aber im allgemeinen mehr geometrische Informationen; idealtypisch dafür ist folgender Satz.

Proposition 1.12. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$, $|\mathbb{X}| = 7$, mit generischer Hilbertfunktion. Dann hat $R_{\mathbb{X}}$ eine minimale graduiert-freie Auflösung der Form*

$$0 \longrightarrow P(-5)^3 \longrightarrow P(-3)^2 \oplus P(-4)^6 \longrightarrow P(-2)^3 \oplus P(-3)^3 \longrightarrow R_{\mathbb{X}}$$

genau dann, wenn \mathbb{X} auf einer Kurve vom Grad 3 liegt, ansonsten ist diese gegeben durch

$$0 \longrightarrow P(-5)^3 \longrightarrow P(-4)^6 \longrightarrow P(-2)^3 \oplus P(-3)^3 \longrightarrow R_{\mathbb{X}}.$$

BEWEIS. [2] 2.8. □

Wir beschließen diese Einführung mit einer weiteren wichtige Klasse von in gewisser Hinsicht extremalen Punktmenge, den vollständigen Durchschnitten:

Definition 1.13. *Eine Punktmenge $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt **vollständiger Durchschnitt** (vom Typ d_1, \dots, d_n), wenn das Verschwindungsideal $I_{\mathbb{X}}$ von n homogenen Polynomen f_1, \dots, f_n mit $\deg f_i = d_i$ erzeugt werden kann.*

Die Bedingung, vollständiger Durchschnitt zu sein, ist sehr restriktiv. So folgt für vollständige Durchschnitte $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ vom Typ (d_1, d_2) aus dem Satz von Bézout, daß \mathbb{X} aus $d_1 \cdot d_2$ Punkten bestehen muß.

Da die minimalen Erzeuger eines vollständigen Durchschnitts eine P -reguläre Folge für $I_{\mathbb{X}}$ bilden, liefert der Koszul-Komplex eine minimale freie Auflösung (vgl. [18] S.28). Diese hat folgende Konsequenz für die Hilbertfunktion von \mathbb{X} .

Satz 1.14. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ vollständiger Durchschnitt vom Typ (d_1, \dots, d_n) . Dann gilt:

- a) \mathbb{X} ist arithmetisch Gorenstein.
- b) $\deg \mathbb{X} = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$.
- c) $\sigma_{\mathbb{X}} = d_1 + d_2 + \dots + d_n - n - 1$.

BEWEIS. [18] S. 30. □

Beispiel 1.15. Jede endliche Punktmenge ist einem vollständigen Durchschnitt enthalten: Ist $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\}$, $P_i = (1 : p_{i1} : \dots : p_{in})$, so ist \mathbb{X} enthalten im „vollständige Gitter“ \mathbb{Y} gegeben durch

$$I_{\mathbb{Y}} := \left\langle \prod_{i=1}^s (x_1 - p_{i1}), \dots, \prod_{i=1}^s (x_n - p_{in}) \right\rangle.$$

Hingegen ist eine Konsequenz aus [23], daß jede Punktmenge *mengentheoretisch* vollständiger Durchschnitt ist, d.h. es existieren stets $f_1, \dots, f_n \in I_{\mathbb{X}}$ mit

$$\sqrt{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} = I_{\mathbb{X}}.$$

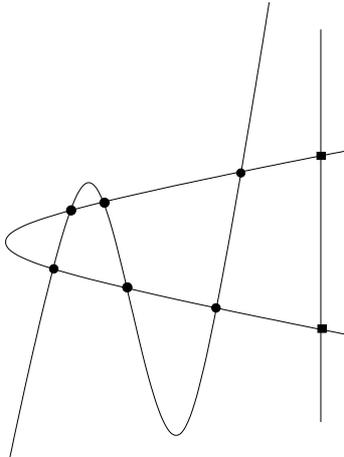
Definition 1.16. Seien $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^n$ zwei reduzierte nulldimensionale Schemata.

- a) \mathbb{X} und \mathbb{Y} heißen (durch einen vollständigen Durchschnitt) **1-lliert**, wenn $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \emptyset$ und $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ ein vollständiger Durchschnitt ist.
- b) \mathbb{X} heißt **(un-)gerade zu \mathbb{Y} liiert**, wenn es $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}, \mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_k = \mathbb{Y}$ gibt (k (un-)gerade), so daß \mathbb{X}_i und \mathbb{X}_{i+1} 1-lliert sind für $i = 0, \dots, k-1$.

Verschiedene Invarianten sind unter gerader Liaison invariant, vgl. etwa (6.9).

Bemerkung 1.17. Ein vollständiger Durchschnitt \mathbb{X} ist sowohl gerade als auch ungerade zu einem Punkt liiert.

BEWEIS. Sei (f_1, \dots, f_n) eine reguläre Folge für $I_{\mathbb{X}}$ und l_1 eine „genügend allgemeine“ Linearform. Man zeigt (vgl. [29]), daß auch $(f_1, \dots, f_n \cdot l_1)$ eine reguläre Folge ist, die das Verschwindungsideal einer Punktmenge $\mathbb{Z} = \mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$ erzeugt mit $I_{\mathbb{Y}} = \langle f_1, \dots, f_{n-1}, l_1 \rangle$. Da $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$, folgt induktiv, daß \mathbb{X} zu einem Punkt liiert ist. Da dieser ungerade zu sich selbst liiert ist (betrachte die Folge $\{(1 : 0)\}, \{(1 : 1), (1 : 2)\}, \{(1 : 3)\}, \{(1 : 0)\}$), folgt die Behauptung. □



Ein zu einem vollständigen
Durchschnitt vom Typ $(2,1)$ li-
nierter vollständiger Durchschnitt
vom Typ $(2,3)$

1.3 Spezielle Klassen von Punktmenge

Viele der in der Theorie auftretenden algebraischen Phänomene kann man bereits für Punktmenge $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ beobachten. Dazu führen wir kurz verschiedene Konstruktionen von Klassen von Punktmenge nach Geramita et al. auf und diskutieren erste algebraische Eigenschaften.

Definition 1.18.

- a) Eine Punktmenge $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ heißt **Pseudo-Linearkonfiguration** vom Typ (k_1, \dots, k_n) , wenn gilt

$$\mathbb{X} = \{(1 : s : t) \mid t \in \{0, \dots, n-1\}, s \in \{0, \dots, k_{n-t}-1\}\}.$$

- b) Eine Pseudo-Linearkonfiguration vom Typ (k_1, \dots, k_n) heißt **Linearkonfiguration**, wenn gilt $k_1 < \dots < k_n$.
- c) \mathbb{X} heißt **ausgespreizte Linearkonfiguration** vom Typ (k_1, \dots, k_n) , wenn gilt $\mathbb{X} = \{(1 : s : t) \mid t \in \{k_1, \dots, k_n\}, s \in \{0, \dots, t-1\}\}$.
- d) Seien l_1, \dots, l_t Geraden im \mathbb{P}^2 , so daß sich für $i \neq j$ l_i und l_j in genau $t-1$ Punkten schneiden. Die Vereinigung aller Schnittpunkte heißt **C-Konfiguration** C_t .

Die Bedeutung von linearen Konfigurationen erklärt auf der algebraischen Seite durch den Begriff des Lex-Segment-Ideals.

Definition 1.19.

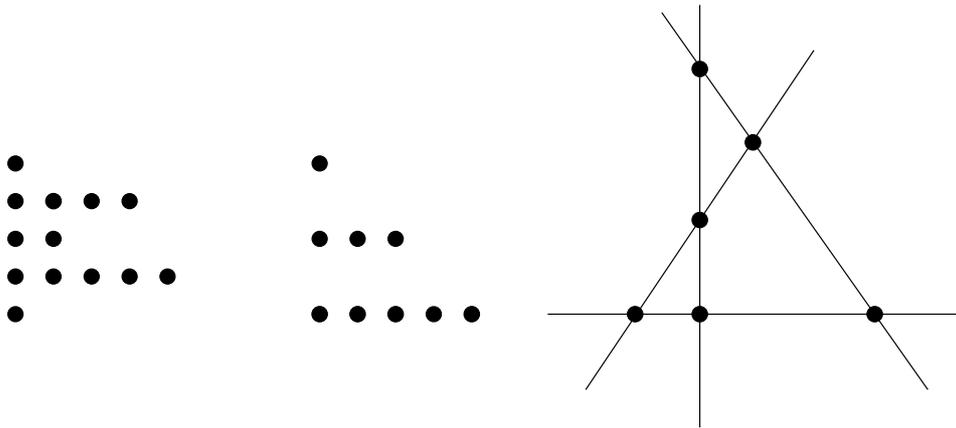
- a) Ein monomiales Ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ wird **Lex-Segment-Ideal** genannt, wenn für alle Terme $t \in I$ gilt: Ist t' ein weiterer Term gleichen Grades mit $t' >_{LEX} t$, so ist auch $t' \in I$.

b) Ein homogenes Ideal $J \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ heißt **Liftung** eines homogenen Ideals $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, wenn gilt $J + \langle x_0 \rangle / \langle x_0 \rangle \cong I$ und x_0 ist ein Nicht-Nullteiler für P/J .

Das Verschwindungsideal einer Linearkonfiguration ist nun gerade die Liftung eines Lex-Segment-Ideals. Allgemeiner gilt, daß man sogar jedes nulldimensionale Lex-Segment-Ideal zum Verschwindungsideal einer Punktmenge liften kann (vgl. etwa [13] ch. 6.2).

Lex-Segment-Ideale haben unter allen Idealen mit gleicher Hilbertfunktion extreme Betti-Zahlen ([20]); diese stimmen mit denen der Liftung überein (vgl. [26] S.7).

Die Relevanz von ausgespreizten Linearkonfigurationen und C-Konfigurationen besteht darin, daß es im Verschwindungsideal Formen kleinen Grades gibt, die Produkt von Linearformen sind, es also i.A. mehr Kollineationen als bei Linearkonfigurationen gibt. Diese verhalten sich unter differentiellen Gesichtspunkten anders als beispielsweise irreduzible Formen, vgl. (3.11).



a) Pseudo-Linearkonfiguration vom Typ $(1,4,2,5,1)$, b) Ausgespreizte Linearkonfiguration vom Typ $(1,3,5)$, c) C-Konfiguration C_4

Betrachtet man $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ als geometrisches Objekt, so ist die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{X}) := \{g \in \text{PGL}_{n+1}(k) : g\mathbb{X} = \mathbb{X}\}$ im Allgemeinen trivial. Interessant hingegen ist die Zusammensetzung von \mathbb{X} aus „Unterobjekten“, d.h. die Frage, wie sich verschiedene Unterschemata $\mathbb{Y}_i \subseteq \mathbb{X}$ zueinander verhalten. Dies führt zu verschiedenen geometrischen Begriffsbildungen.

Definition 1.20. a) Ein Punktmenge \mathbb{X} heißt (i, j) -**uniform**, wenn gilt: Sind $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2 \subseteq \mathbb{X}$ mit $|\mathbb{Y}_1| = |\mathbb{Y}_2| = |\mathbb{X}| - i$, so gilt $\text{HF}_{\mathbb{Y}_1}(j) = \text{HF}_{\mathbb{Y}_2}(j)$.

b) \mathbb{X} heißt i -**uniform**, wenn für jedes Unterschema \mathbb{Y} mit $|\mathbb{X}| - i \leq |\mathbb{Y}| \leq |\mathbb{X}|$ gilt

$$\text{HF}_{\mathbb{Y}}(t) = \min(\text{HF}_{\mathbb{X}}(t), |\mathbb{Y}|).$$

- c) \mathbb{X} heißt **Cayley-Bacharach-Schema**, wenn \mathbb{X} 1-uniform ist.
- d) \mathbb{X} befindet sich in **uniformer Lage**, wenn \mathbb{X} $(|\mathbb{X}| - 1)$ -uniform ist.
- e) \mathbb{X} befindet sich in **linear allgemeiner Lage**, wenn für jeden echten linearen Teilraum $L \subseteq \mathbb{P}^d$ gilt

$$|\mathbb{X} \cap L| \leq 1 + \dim L.$$

Bemerkung 1.21.

- a) Ist \mathbb{X} (i, j) -uniform, so gilt $\text{HF}_{\mathbb{Y}}(j) = \min(i, \text{HF}_{\mathbb{X}}(j))$ für alle $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $|\mathbb{Y}| = i$. Sei nämlich f_i ein minimaler Separator vom Grad $\sigma + 1$ und \mathbb{Y} das durch f_i definierte Unterschema von \mathbb{X} . Dann gilt

$$\text{HF}_{\mathbb{Y}}(t) = \min(s - 1, \text{HF}_{\mathbb{X}}(t))$$

für alle $t \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Y} hat also eine „abgeschnittene Hilbertfunktion“. Per Induktion gibt es ein Unterschema \mathbb{Y}_i mit $\text{HF}_{\mathbb{Y}_i}(t) = \min(i, \text{HF}_{\mathbb{X}}(t))$, woraus die Behauptung folgt.

- b) Operiert die $\text{PGL}_{n+1}(k)$ transitiv auf der Menge der d -elementigen Teilmengen von $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ für $d = 1, \dots, s$, so befindet sich \mathbb{X} in uniformer Lage. Die Existenz einer solchen Gruppenwirkung bildet die Beweisidee des Satzes von Harris über die uniforme Lage ([28]) und liefert die Beispiele von Galligo ([24]).
- c) \mathbb{X} befindet sich in linear allgemeiner Lage genau dann, wenn je $n + 1$ Punkte von \mathbb{X} , betrachtet als Vektoren im \mathbb{A}^{n+1} , den \mathbb{A}^{n+1} aufspannen. Dies ist genau dann der Fall, wenn \mathbb{X} $(|\mathbb{X}| - n - 1, 1)$ -uniform ist.
- d) Level-Schemata – und damit insbesondere vollständige Durchschnitte und Schemata, die arithmetisch Gorenstein sind – sind Cayley-Bacharach-Schemata: Da „Separatorengrade Sockelgrade sind“ (1.10 b), folgt daß jeder minimale Separator Grad $\sigma + 1$ hat. Nach der Bemerkung nach (1.1) erzeugt ein minimaler Separator von P_i das Verschwindungsideal von $\mathbb{Y}_i := \mathbb{X} \setminus \{P_i\}$; damit ist $\text{HF}_{\mathbb{Y}_i}(t) = \text{HF}_{\mathbb{X}}(t)$ für $t \leq \sigma$ und $\text{HF}_{\mathbb{Y}_i}(t) = \text{HF}_{\mathbb{X}}(t) - 1$ für $t \geq \sigma + 1$, was gerade die Definition von 1-Uniformität ist.
- e) Der Name „Cayley-Bacharach-Schema“ erklärt sich folgendermaßen. Sei $\mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_9\} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein vollständiger Durchschnitt von zwei Kubiken und C eine weitere Kubik, die P_1, \dots, P_8 enthält. Dann besagt eine Version des Satzes von Cayley-Bacharach, daß C auch P_9 enthält. Dies ist äquivalent dazu, daß für alle $\mathbb{Y}_i = \mathbb{X} \setminus \{P_i\}$ die Hilbertfunktion gegeben ist durch $\text{HF}_{\mathbb{Y}_i} : 1 \ 3 \ 6 \ 8 \ 8 \ \dots$. Da $\text{HF}_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 8 \ 9 \ 9 \ \dots$, verallgemeinert der Begriff des Cayley-Bacharach-Schemas also diese Eigenschaft.

Kapitel 2

Der Modul der Kähler-Differentialformen

In diesem Kapitel untersuchen wir nach Einführung des allgemeinen Begriffes der Kähler-Differentialformen verschiedene Spezialisierungen dieses Begriffes für Punktfolgen, nämlich die sogenannten holomorphen, ganzen und meromorphen Differentialformen. Sind die beiden letzteren zyklische Moduln über den jeweiligen zugrundeliegenden Ringen, ist die R_X -Modulstruktur der holomorphen Differentialformen $\Omega_{R_X/k}$ sehr reichhaltig. Im wesentlichen dafür verantwortlich ist der Torsionsuntermodul, den wir daraufhin genauer untersuchen. Die Verbindung von holomorphen Differentialformen mit der ersten infinitesimalen Umgebung des Schemas, wie sie im letzten Abschnitt gezeigt wird, schlägt eine Brücke zu dem klassischen Gebiet des Studiums sogenannter Doppelpunktschemata.

2.1 Allgemeine Betrachtungen

Definition 2.1. Sei R ein Ring, S eine R -Algebra und M ein S -Modul.

- a) Eine R -lineare Abbildung $d : S \rightarrow M$ heißt **R-Derivation**, wenn für alle $f, g \in S$ die Leibniz-Regel

$$d(fg) = fdg + gdf$$

gilt. Definiert man für $b \in S$

$$(b \cdot d)(m) := b \cdot d(m),$$

so wird die abelsche Gruppe $\text{Der}_R(S, M)$ aller R -Derivationen $S \rightarrow M$ zu einem S -Modul.

b) Sei N_1 der freie S -Modul auf den Symbolen $\{d(f) : f \in S\}$ und N_2 der von Elementen der Form $d(bb') - bd(b') - b'd(b)$ ($b, b' \in S$) und

$$d(ab + a'b') - ad(b) - a'd(b') \quad (a, a' \in R, b, b' \in S)$$

erzeugte Untermodul. Der Quotient $\Omega_{S/R} := N_1/N_2$ heißt **Modul der Kähler-Differentialformen von S über R** . Die Abbildung

$$d : S \rightarrow \Omega_{S/R}, \quad df := d(f)$$

heißt **universelle R -Derivation von S** .

Bemerkung 2.2.

a) Die universelle R -Derivation von S ist offenbar eine R -Derivation, die folgende universelle Eigenschaft aufweist: Für jeden S -Modul M und jede R -Derivation $e : S \rightarrow M$ gibt es genau einen S -linearen Homomorphismus $e' : \Omega_{S/R} \rightarrow M$ mit $e = e'd$.

Für einen S -Modul M definiert die Zuordnung $M \mapsto \text{Der}_R(S, M)$ einen kovarianten Funktor $\text{Der}_R(S, -)$ auf der Kategorie der S -Moduln. Ist dabei $f : M_1 \rightarrow M_2$ ein Morphismus von S -Moduln, so ist $\text{Der}_R(S, -)(f)$ für $e \in \text{Der}_R(S, M_1)$ gegeben durch

$$\text{Der}_R(S, -)(e) := f \circ e.$$

Die universelle Eigenschaft von $\Omega_{S/R}$ ist gerade gleichbedeutend damit, daß $\Omega_{S/R}$ diesen Funktor repräsentiert, d.h. es gilt

$$\text{Der}_R(S, M) \cong \text{Hom}_S(\Omega_{S/R}, M).$$

Daher spricht man von $\Omega_{S/R}$ auch als Modul der universellen Differentialformen.

b) Ist S als R -Algebra endlich erzeugt, etwa von (s_1, \dots, s_n) , so folgt aufgrund der Leibniz-Regel, daß $\Omega_{S/R}$ als S -Modul von (ds_1, \dots, ds_n) erzeugt wird.

In zwei konkreten Situationen zeigt sich die Relevanz dieser Konstruktion:

Bemerkung 2.3.

a) Ist M eine glatte affine algebraische Varietät über \mathbb{R} , so ist M auch eine glatte reelle Mannigfaltigkeit. Bezeichnet $C^\infty(M)$ die glatten, $\mathcal{O}(M)$ die regulären Funktionen auf M , so gilt nach [1] S. 391 für das Kotangentialbündel

$$T^*(M) \cong C^\infty(M) \otimes_{\mathcal{O}(M)} \Omega_{\mathcal{O}(M)/\mathbb{R}}.$$

- b) Ist $[L : K]$ eine separable Körpererweiterung, so gilt: f_1, \dots, f_s ist genau dann eine Transzendenzbasis von $L|K$, wenn df_1, \dots, df_s L -Basis für $\Omega_{L/K}$ ist ([8] 5.3).

Beispiel 2.4. Ist $S = R[x_1, \dots, x_n]$, so gilt $\Omega_{S/R} = \bigoplus_{i=1}^n S dx_i$. Die universelle Derivatoren ist dabei gegeben durch

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

□

Wir fassen das Verhalten von Ω unter verschiedenen Ringkonstruktionen zusammen.

Proposition 2.5. Sei R ein Ring, S eine R -Algebra und T eine S -Algebra.

- a) Es gibt eine exakte Sequenz von T -Moduln

$$T \otimes \Omega_{S/R} \xrightarrow{\delta} \Omega_{T/R} \xrightarrow{\epsilon} \Omega_{T/S} \rightarrow 0,$$

wobei δ gegeben ist durch $\delta(t \otimes \omega) = t\omega$ und ϵ durch $\epsilon(dt) = dt$.

- b) Ist T eine Lokalisierung von S , so gilt

$$\Omega_{T/R} = T \otimes_S \Omega_{S/R}.$$

- c) Gilt $T \cong S/I$, so ist die Sequenz von T -Moduln

$$I/I^2 \xrightarrow{\alpha} T \otimes_S \Omega_{S/R} \xrightarrow{\beta} \Omega_{T/R} \rightarrow 0$$

exakt. Dabei gilt $\alpha(i + I^2) = 1 \otimes di$ und $\beta(t \otimes ds) = t \cdot ds$.

- d) Sind S_1, S_2 R -Algebren und $S = S_1 \otimes S_2$, so gilt

$$\Omega_{S/R} \cong (S_1 \otimes_R \Omega_{S_2/R}) \oplus (S_2 \otimes_R \Omega_{S_1/R}).$$

- e) Sind S_1, \dots, S_n R -Algebren und $S = \prod_i S_i$, so gilt

$$\Omega_{S/R} \cong \bigoplus_i \Omega_{S_i/R}$$

BEWEIS. a) [1] 16.2, b) [2] 4.22a) c) [1] 16.3, d) [1] 16.10, e) [2] 4.11. □

Bemerkung 2.6. Aus den Beweisen zu obiger Proposition folgt, daß die angegebenen Abbildungen homogen vom Grad 0 sind, wenn die zugrundeliegenden Objekte \mathbb{Z} -graduiert sind. Insbesondere sind die genannten Isomorphismen Isomorphismen graduierter Moduln.

2.2 Differentialformen für Punktmenngen

In der vorliegenden Situation sind besonders die Ringe $R = R_{\mathbb{X}}, L = Q^h(R)$ und der ganze Abschluß S von R in L interessant. Mit Hilfe der Rechenregeln können wir gewisse natürliche Differentialmoduln konkret angeben.

Definition 2.7. Der R -Modul $\Omega_{R/k}$ heißt **Modul der holomorphen Differentialformen** auf \mathbb{X} . Als **meromorphe Differentialformen** auf \mathbb{X} bezeichnen wir den L -Modul $\Omega_{L/k}$. Schließlich nennen wir den S -Modul $\Omega_{S/k}$ die **ganzen Differentialformen** auf \mathbb{X} .

Proposition 2.8. a) Es gibt einen Isomorphismus graduierter R -Moduln

$$\Omega_{R/k} \cong \left(\bigoplus_{i=0}^n R dx_i \right) / \overline{dI}.$$

Dabei bezeichnet $\bigoplus_{i=0}^n R dx_i$ den freien R -Modul auf den (dx_i) mit $\deg dx_i = 1$ für $i = 0, \dots, n$ und \overline{dI} den von $\{\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i : f \in I\}$ erzeugten Untermodul.

b) Die universellen Differentialmoduln $\Omega_{S/k}$ und $\Omega_{L/k}$ sind freie zyklische S - bzw. L -Moduln. Genauer gilt

$$\Omega_{S/k} \cong k[T_1]dT_1 \times \dots \times k[T_s]dT_s \cong S dx_0$$

und

$$\Omega_{L/k} \cong L dx_0.$$

BEWEIS.

a) Da nach (2.4) gilt $\Omega_{P/k} = \bigoplus_{i=0}^n P dx_i$, folgt die Behauptung mit (2.5 c).

b) Da $S \cong k[t_1] \times \dots \times k[t_s]$, folgt mit (2.5 e) und (2.4) (mit $n = 1$) $\Omega_{S/k} \cong \bigoplus_i k[T_i]dT_i$. Da $dx_0 = (dT_1, \dots, dT_s)$, folgt der zweite Isomorphismus. Nun ist $L = S_{x_0}$ eine Lokalisierung, und mit (2.5 b) erhalten wir

$$\Omega_{L/k} = L \otimes_S S dx_0 \cong L dx_0.$$

□

Ist G eine abelsche Gruppe, so kann die Untergruppe der Elemente endlicher Ordnung

$$TG := \{g \in G : |\langle g \rangle| < \infty\}$$

charakterisiert werden als

$$TG = \ker(G \rightarrow \mathbb{Q} \otimes_Z G).$$

Analog definieren wir

Definition 2.9. Der Torsionsuntermodul $T\Omega := T\Omega_{R/k}$ ist definiert als Kern der kanonischen Abbildung

$$\Omega_{R/k} \rightarrow L \otimes \Omega_{R/k} = \Omega_{L/k}.$$

Wir geben zwei Charakterisierungen von T , die die Bedeutung dieses Untermoduls unterstreichen.

Für den affinen Kegel \mathbb{Y} über \mathbb{X} gilt, daß der Tangentialraum an einem Punkt $p \neq 0$ kanonisch isomorph zu der p enthaltenden Komponente von \mathbb{Y} ist. Dies motiviert es, Differentialformen auf \mathbb{X} auch als Funktionen auf \mathbb{X} zu interpretieren. Algebraisch gesehen entspricht dies dem durch die Eulerderivation auf R vermittelten Homomorphismus $\Omega_{R/k} \rightarrow R$.

Definition 2.10. Für einen positiv graduierten Ring $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ heißt die R_0 -Derivation $e : R \rightarrow R$ gegeben durch $e(r_i) = i \cdot r_i$ für homogenes r_i vom Grad i die **Euler-Derivation**.

Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\Omega_{R/k}$ gibt es einen R -Homomorphismus $c : \Omega_{R/k} \rightarrow R$ mit $e = c \circ d$, der also im Falle $R = R_{\mathbb{X}}$ gegeben ist durch $c_{R_{\mathbb{X}}}(dx_i) = x_i$.

Proposition 2.11. a) Der Torsionsuntermodul entspricht gerade den 1-Formen, die auf \mathbb{X} verschwinden: $T\Omega = \ker c_{R_{\mathbb{X}}}$.

b) Es gibt eine Zerlegung von graduierten k -Vektorräumen

$$\Omega_{R_{\mathbb{X}}/k} = dR_{\mathbb{X}} \bigoplus T\Omega.$$

BEWEIS.

a) Sei e_L die Eulerderivation für L und c_L der zugehörige L -Homomorphismus $\Omega_{L/k} \rightarrow L$. Aus den Definitionen ist ersichtlich, daß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{R_{\mathbb{X}}/k} & \longrightarrow & \Omega_{L/k} \\ c_{R_{\mathbb{X}}} \downarrow & & \downarrow c_L \\ R & \xrightarrow{\iota} & L \end{array}$$

c_L ist ein Isomorphismus, ebenso ist $\iota : R \rightarrow L$ injektiv, woraus die Behauptung folgt.

- b) Für $c = c_{R_{\mathbb{X}}}$ ist die Einschränkung $c_t : (\Omega_{R/k})_t \rightarrow R_t$ für $t \geq 1$ surjektiv da $\frac{1}{t}d$ Linksinverse ist. Aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow (T\Omega)_t \rightarrow (\Omega_{R/k})_t \rightarrow R_t$$

folgt damit die Behauptung. □

Die Inklusion $R \hookrightarrow S$ liefert andererseits einen Morphismus $\phi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{X}$, mittels dessen man Differentialformen auf \mathbb{X} zurückziehen kann. Dieser Pullback entspricht der kanonischen Abbildung

$$\Omega_{R_{\mathbb{X}/k}} \rightarrow \Omega_{S/k} = S \otimes \Omega_{R_{\mathbb{X}/k}}.$$

Da $\Omega_{R_{\mathbb{X}/k}} \rightarrow \Omega_{L/k}$ durch $\Omega_{S/k}$ faktorisiert und $\Omega_{S/k}$ injektiv in $\Omega_{L/k}$ einbettet, erhalten wir eine zweite Charakterisierung:

Proposition 2.12. *Der Torsionsuntermodul entspricht gerade den Differentialformen $\omega \in \Omega_{R_{\mathbb{X}/k}}$, deren Pullback $\phi_*\omega$ verschwindet.* □

Bemerkung 2.13.

- a) Ist $\phi^\# : R_{\mathbb{X}} \rightarrow R_{\mathbb{Y}}$ der zu einem Morphismus zweier nulldimensionaler reduzierter Schemata $\phi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ gehörende K -Algebrenhomomorphismus, respektiert die induzierte Abbildung

$$\Omega(\phi^\#) : \Omega_{R_{\mathbb{X}/k}} \rightarrow \Omega_{R_{\mathbb{Y}/k}}$$

die Zerlegungen von Ω . Mit anderen Worten gilt

$$\Omega(\phi^\#)(dR_{\mathbb{X}}) \subseteq dR_{\mathbb{Y}} \text{ und } \Omega(\phi^\#)(T_{\mathbb{X}}) \subseteq T_{\mathbb{Y}},$$

wie aus der Definition folgt. Ist $\phi^\#$ surjektiv, also z.B. falls $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, folgt aus Dimensionsgründen auch

$$\Omega(\phi^\#)(dR_{\mathbb{X}}) = dR_{\mathbb{Y}} \text{ und } \Omega(\phi^\#)(T_{\mathbb{X}}) = T_{\mathbb{Y}}.$$

- b) Seien $\mathbb{Y}_1, \dots, \mathbb{Y}_s$ die Unterschemata von \mathbb{X} mit $\deg \mathbb{Y}_i = s - 1$ und $\pi_i : R_{\mathbb{X}} \rightarrow R_{\mathbb{Y}_i}$ die kanonischen Projektionen. Geschlossene 1-Formen sind „lokal“ in dem Sinne, daß die Kenntnis von

$$\Omega(\pi_i)(dr) \in \Omega_{R_{\mathbb{Y}_i}/k} \quad (i = 1, \dots, s)$$

schon dr eindeutig bestimmt. Dies gilt nicht für Torsionselemente. Ist nämlich z.B. $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^1$ vom Grad s , so gibt es nach [22] Torsion genau in den Graden 2 bis $2s + 1$. Für $h \in (T\Omega)_{2s+1} \setminus \{0\}$ gilt damit $\Omega(\pi_i)(h) = 0$ für $i = 1, \dots, s$. □

2.3 Die erste infinitesimale Umgebung von \mathbb{X}

Eng verknüpft mit dem Modul der Kähler-Differentialformen ist die sogenannte erste infinitesimale Umgebung von \mathbb{X} . Dieses Konzept erlaubt eine dritte Charakterisierung des Torsionsuntermoduls.

Definition 2.14. a) Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ die minimalen Primteiler von $I = I_{\mathbb{X}}$. Dann heißt

$$I^{(2)} := \mathfrak{p}_1^2 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_s^2$$

das **symbolische Quadrat** von I .

b) Das zu $P/I^{(2)}$ gehörige Schema \mathbb{Z} heißt **erste infinitesimale Umgebung von \mathbb{X}** .

Daneben ist für \mathbb{Z} auch die Bezeichnung als Doppelpunktschema mit Träger in \mathbb{X} gebräuchlich.

Bemerkung 2.15.

a) Aus der Taylor-Entwicklung folgt für ein Polynom $f \in P = k[x_0, \dots, x_n]$

$$f \in \mathfrak{p}_i^2 \iff f(P_i) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x_j}(P_i) = 0 \text{ für } j = 0, \dots, n,$$

also

$$f \in I^{(2)} \iff f, \frac{\partial f}{\partial X_j} \in I \text{ für } j = 0, \dots, n$$

für die gewöhnlichen partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial X_j}$. Ein solches f definiert also eine Hyperfläche, die die P_i enthält und an diesen Punkten Singularitäten aufweist.

b) Aus der Definition folgt, daß $I^{(2)}$ ein homogenes Ideal ist, welches in I enthalten ist. Da auch $\frac{\partial}{\partial x_i} I^{(2)} \subseteq I$, folgt für die Initialgrade

$$\alpha(I^{(2)}) \geq \alpha(I) + 1.$$

Desweiteren gilt offenbar $I^2 \subseteq I^{(2)}$.

Wir geben ein Beispiel eines Ideals I (motiviert durch [1] 3.9.1), für das gilt $I^2 \subsetneq I^{(2)}$ und $\alpha(I^{(2)}) = \alpha(I) + 1$.

Beispiel 2.16. Betrachte ein Schema \mathbb{X} bestehend aus 9 generischen Punkten im \mathbb{P}^8 . Nach linearem Koordinatenwechsel können wir annehmen, daß gilt

$$\mathbb{X} = \{(1 : 0 : \dots : 0), \dots, (0 : \dots : 0 : 1)\}.$$

Da \mathbb{X} nicht ausgeartet ist, gilt $\alpha(I) \geq 2$ und damit $\alpha(I^2) \geq 4$.

Punkte im \mathbb{P}^8 entsprechen bis auf Skalare genau den 3×3 -Matrizen über k , \mathbb{X} kann also interpretiert werden als Vereinigung von Matrizen vom Rang 1. Die Determinante für 3×3 -Matrizen \det ist ein homogenes Polynom vom Grad 3, das auf \mathbb{X} verschwindet; zudem sind die partiellen Ableitungen von \det gerade die 2×2 -Minoren, die auch auf \mathbb{X} verschwinden. Also gilt $\det \in I^{(2)}$, $\alpha(I^{(2)}) \leq 3$ und damit $I^2 \neq I^{(2)}$.

In der Tat zeigt eine Computerberechnung, daß gilt $\text{HF}_{I^{(2)}}(3) = 84$. □

Allerdings stimmen $I^{(2)}$ und I^2 in hohen Graden überein, wie man folgender Proposition entnimmt.

Proposition 2.17.

- a) *Der Torsionsuntermodul des R -Moduls I/I^2 ist gerade $I^{(2)}/I^2$.*
- b) *Ist \mathbb{X} vollständiger Durchschnitt, so gilt $I^{(2)} = I^2$.*

BEWEIS.

a) [11] 4.16.

b) Nach [1] ex. 17.16.a ist I/I^2 freier R -Modul, also insbesondere torsionsfrei. Nach a) ist dann $I^{(2)}/I^2 = 0$.

□

Für die Berechnung von $I^{(2)}$ kann eine Variante des Buchberger-Möller-Algorithmus verwendet werden, wenn die Koordinaten der Punkte bekannt sind. Im allgemeinen Fall kann man $I^{(2)}$ als Saturierung berechnen:

$$I^{(2)} = I^2 :_P (x_0, \dots, x_n)^\infty,$$

vgl. [11] 4.16.

Bemerkung 2.18. Interessant ist in diesem Zusammenhang eine Charakterisierung von Vasconcelos ([1] ex. 20.23) für den lokalen Fall: Sei (R, \mathfrak{p}) ein lokaler Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann gilt: I wird genau dann von einer regulären Folge erzeugt, wenn gilt $\text{projdim } I < \infty$ und I/I^2 ist freier R/I -Modul.

Das Studium von $I^{(2)}$ hängt unmittelbar mit dem von $\Omega_{R/k}$ und der Torsion von Ω zusammen. Sei \mathbb{Z} die erste infinitesimale Umgebung von \mathbb{X} . Wir notieren zunächst einige exakte Sequenzen graduerter k -Vektorräume. Der Zusammenhang zwischen den Koordinatenringen von $R_{\mathbb{X}}$ und $R_{\mathbb{Z}}$ ist offenbar gegeben durch

$$0 \longrightarrow I/I^{(2)} \longrightarrow R_{\mathbb{Z}} \longrightarrow R_{\mathbb{X}} \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

Sei $M := \Omega_{P/k}/I\Omega_{P/k} \cong \bigoplus_{i=0}^n Rdx_i$, $\epsilon : \Omega_{P/k} \rightarrow M$ die kanonische Projektion und $\tilde{d} := \epsilon \circ d_{P/K}$. Da $\tilde{d}I^{(2)} = 0$, gibt es einen Isomorphismus

$$I/I^{(2)} \cong \overline{dI} := \tilde{d}I \quad (2.2)$$

Desweiteren induziert \tilde{d} eine Abbildung $\bar{d} : R_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$; dabei sei $j : M \rightarrow \text{coker } \bar{d}$ die kanonische Abbildung.

Schließlich haben wir aufgrund der Präsentation von $\Omega_{R/k}$ und der Zerlegung von $\Omega_{R/k}$ als direkte Summe die exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow \overline{dI} \longrightarrow M \xrightarrow{\pi_1} \Omega_{R/k} \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

und

$$0 \longrightarrow R_{\mathbb{X}} \longrightarrow \Omega_{R/k} \xrightarrow{\pi_2} T\Omega \longrightarrow 0. \quad (2.4)$$

Damit gilt

Proposition 2.19. *Es gibt ein kommutatives Diagramm graduerter k -Vektorräume mit exakten Zeilen und Spalten*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & I/I^{(2)} & \longrightarrow & \overline{dI} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \text{coker } \bar{d} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R_{\mathbb{X}} & \longrightarrow & \Omega_{R/K} & \longrightarrow & T\Omega \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Insbesondere ist $T \cong \text{coker } \bar{d}$.

BEWEIS. Die oben erwähnten exakten Sequenzen entsprechen dem Diagramm

mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & I/I^{(2)} & \longrightarrow & \overline{dI} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & M & \xrightarrow{j} & \text{coker } \bar{d} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \pi_1 & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{\mathbb{X}} & \longrightarrow & \Omega_{R/k} & \xrightarrow{\pi_2} & T \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Man prüft nach, daß die Rechtecke kommutieren.

Definiere $h : \text{coker } \bar{d} \rightarrow T$ für $n \in \text{coker } \bar{d}$ als $h(n) := \pi_2 \pi_1(m)$ für ein $m \in M$ mit $j(m) = n$. Eine Diagrammjagd zeigt, daß h wohldefiniert und surjektiv ist. Das Schlangenlemma liefert die exakte Sequenz

$$I/I^{(2)} \rightarrow \overline{dI} \rightarrow \ker h \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0,$$

woraus aufgrund $I/I^{(2)} \cong \overline{dI}$ auch $\ker h = 0$ folgt. □

Insbesondere folgt für die Hilbertfunktion von \mathbb{Z}

$$\text{HF}_{\mathbb{Z}}(t) = (t+1)\text{HF}_{\mathbb{X}}(t-1) - \text{HF}_{T\Omega}(t).$$

Bemerkung 2.20.

- a) In [26] werden u.a. extremale Hilbertfunktionen von Doppelpunktschemata untersucht. Sei dazu für $\mathbb{X}_i \subseteq \mathbb{Z}_i$ die erste infinitesimale Umgebung von \mathbb{X}_i und $(\mathbb{X}_i)_{i \in I}$ die Gesamtheit aller Punktmengen mit einer vorgeschriebenen Hilbertfunktion, d.h. die \mathbb{X}_i sind also Punkte eines gewissen Hilbertschemas. Gibt es dann i_{\max}, i_{\min} mit $\text{HF}_{\mathbb{Z}_{i_{\max}}} \geq \text{HF}_{\mathbb{Z}_i}$ bzw. $\text{HF}_{\mathbb{Z}_{i_{\min}}} \leq \text{HF}_{\mathbb{Z}_i} \forall i \in I$? Es wird gezeigt ([26] 7.3), daß i_{\max} für $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ existiert, und daß die C-Konfiguration in ihrer Klasse das Maximum annimmt. Dies bedeutet also gerade, daß die Hilbertfunktion von $\Omega_{R_{C_k}/k}$ minimal ist.

- b) Desweiteren läßt sich mit dieser Verbindung die Hilbertfunktion von $\Omega_{R/k}$ für generische Punkte angeben, da die Hilbertfunktion für die erste infinitesimale Umgebung von generischen Punkten nach Ergebnissen von Hirschowitz und Alexander bekannt ist (vgl. [22] 4.4).

Kapitel 3

Höhere Differentialformen

Bildet der Modul der Kähler-Differentialformen in einem geometrischen Kontext ein Analogon zu 1-Formen, so ist die universelle Differentialalgebra ein Pendant für höhere Differentialformen. Die damit assoziierte deRham-Kohomologie ermöglicht es, Werkzeuge der homologischen Algebra einzusetzen. Beispielsweise ist der deRham-Komplex im Wesentlichen exakt und liefert damit ein besseres Verständnis des Torsionsuntermoduls. Aber auch die Fülle neuer Hilbertfunktionen, die mit höheren Differentialformen verbunden sind, beinhaltet schon in niedrigen Dimensionen interessante Informationen.

Definition 3.1. Für eine R -Algebra S ist die **universelle Differentialalgebra** definiert als

$$\overline{\Omega}_{S/R} := \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i \Omega_{S/R},$$

wobei $\Lambda^0 \Omega_{S/R} := S$ gesetzt wird. Elemente aus $\Omega_{S/R}^p := \Lambda^p \Omega_{S/R}$ heißen **p -Formen**.

Es ist also $\Omega_{S/R}^1 = \Omega_{S/R}$, d.h. 1-Formen sind gerade Kähler-Differentialformen.

Für $\phi, \psi \in \overline{\Omega}_{S/R}$ notieren wir das äußere Produkt als $\phi \wedge \psi$.

Beispiel 3.2. Für $S = R[x_1, \dots, x_n]$ und $1 \leq p \leq n$ ist

$$\Omega_{S/R}^p = \bigoplus_{i_1 < \dots < i_p} S dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Insbesondere ist also $\Omega_{S/R}^p$ frei vom Rang $\binom{n}{p}$. □

Wird S als R -Algebra von s_1, \dots, s_n erzeugt, folgt aus der Definition des äußeren Produktes, daß $\Omega_{S/R}^k = 0$ für $k \geq n + 1$.

Elemente aus $\Omega_{S/R}^p$ lassen sich schreiben als

$$\tau = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=p}} r_I ds_I$$

mit $ds_I := ds_{i_1} \wedge \dots \wedge ds_{i_p}$. Für ein Element dieser Gestalt setzen wir

$$d\tau := \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=p}} dr_I \wedge ds_I.$$

Ist S graduiert, so sind auch die höheren Differentialformen-Moduln graduiert durch $\deg(rds_{i_1} \wedge \dots \wedge ds_{i_t}) := \deg r + \sum_{j=1}^t \deg s_{i_j}$. Dadurch wird d zu einer homogenen R -linearen Abbildung vom Grad 0.

Für $k = 0$ stimmt d mit der universellen Derivation überein, und da $d(1) = 0$, erhalten wir $d \circ d = 0$.

Definition 3.3. Die Homologie des Komplexes

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{d} \Omega_{S/R}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{S/R}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

heißt **deRham-Kohomologie** von S/R . Die p . Kohomologiegruppe

$$\ker(\Omega_{S/R}^p \rightarrow \Omega_{S/R}^{p+1}) / \operatorname{im}(\Omega_{S/R}^{p-1} \rightarrow \Omega_{S/R}^p)$$

wird mit $H_{DR}^p(S/R)$ bezeichnet. Elemente aus $\ker(\Omega_{S/R}^p \rightarrow \Omega_{S/R}^{p+1})$ heißen **geschlossene**, Elemente aus $\operatorname{im}(\Omega_{S/R}^{p-1} \rightarrow \Omega_{S/R}^p)$ **exakte Differentialformen**.

Das Bilden von Kohomologiegruppen ist in natürlicher Weise funktoriell, d.h. $H_{DR}^p(-/R)$ ist ein Funktor auf der Kategorie der R -Algebren.

Man erinnere sich, daß nach dem Poincaré-Lemma jede geschlossene p -Form auf dem \mathbb{R}^n exakt ist. Für die gewöhnliche deRham-Kohomologie, ebenfalls mit H_{DR}^p bezeichnet, ist dies gleichbedeutend damit, daß $H_{DR}^p = 0$ für $p > 0$ (und $H_{DR}^0 = \mathbb{R}$).

Wir beschließen die allgemeinen Betrachtungen von Differentialformen mit folgendem Satz, der für den algebraischen Kontext eine starke Verallgemeinerung dieser Tatsache bedeutet. Aufgrund der Bedeutung für unsere Situation und des verblüffenden Argumentes bringen wir den Beweis nach [36].

Satz 3.4. Sei A eine positiv graduierte \mathbb{Q} -Algebra. Dann induziert die Inklusion $\iota : A_0 \hookrightarrow A$ einen Isomorphismus $H_{DR}(A_0/\mathbb{Q}) \cong H_{DR}(A/\mathbb{Q})$.

Unmittelbar daraus folgt

Korollar 3.5. Sei k ein Körper der Charakteristik 0 und $P = k[x_1, \dots, x_n]$ der standardgraduierte Polynomring in n Variablen über k . Dann gilt für jedes homogene Ideal $I \subset P$: $H_{DR}^0((P/I)/k) = k$ und $H_{DR}^p((P/I)/k) = 0$ für $p > 0$.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 3.6. *Sei k ein Körper der Charakteristik 0 und A eine k -Algebra. Dann induziert die Inklusion $\iota : A \hookrightarrow A[t]$ einen Isomorphismus*

$$\phi : H_{DR}^p(A/k) \rightarrow H_{DR}^p(A[t]/k)$$

für alle $p \geq 0$.

BEWEIS. Nach [8] 4.9 gilt

$$\Omega_{A[t]/k}^p = (\Omega_{A/k}^p \otimes_k k[t]) \oplus (\Omega_{A/k}^{p-1} \otimes_k k[t]dt).$$

Nun ist $H_{DR}^p(A[t]/k) \cong A[t] \otimes H_{DR}^p(A/k)$, woraus aufgrund Flachheit von $A[t]$ über A die Injektivität von $\phi_p := H_{DR}^p(\iota)$ folgt. Zu zeigen bleibt die Surjektivität von ϕ_p . Sei dazu $\theta \in \Omega_{A[t]/k}^p$ eine geschlossene Differentialform. In dem man ggf. einige ω_j oder τ_j als 0 wählt, kann man θ schreiben als

$$\theta = (\omega_0 + \omega_1 t + \dots + \omega_i t^i) + (\tau_0 + \tau_1 t + \dots + \tau_{i-1} t^{i-1}) dt$$

für gewisse $\omega_j \in \Omega_{A/k}^p, \tau_j \in \Omega_{A/k}^{p-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = d\theta &= d\omega_0 + (d\omega_1)t + (d\omega_2)t^2 + \dots + (d\omega_i)t^i \\ &+ (-1)^p(\omega_1 + 2\omega_2 t + \dots + i\omega_i t^i) \wedge dt \\ &+ (d\tau_0 + (d\tau_1)t + \dots + (d\tau_{i-1})t^{i-1}) \wedge dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt $d\omega_0 = 0$ und $(-1)^p j \omega_j + d\tau_{j-1} = 0$ für $j = 1, \dots, i$. Da $\text{char } k = 0$, können wir setzen $\Lambda := \tau_0 t + \tau_1 \frac{t^2}{2} + \dots + \tau_{i-1} \frac{t^i}{i}$ und berechnen

$$\begin{aligned} d\Lambda &= (-1)^{p-1}(\tau_0 + \tau_1 t + \dots + \tau_{i-1} t^{i-1}) dt + ((d\tau_0)t + (d\tau_1) \frac{t^2}{2} + \dots + d\tau_{i-1} \frac{t^i}{i}) \\ &= (-1)^{p-1}(\tau_0 + \tau_1 t + \dots + \tau_{i-1} t^{i-1}) dt + (-1)^{p-1}(\omega_1 t + \omega_2 t^2 + \dots + \omega_i t^i). \end{aligned}$$

Damit gilt $\theta + (-1)^p d\Lambda = \omega_0$, also haben θ und die geschlossene Form ω_0 gleiches Bild in $H_{DR}^p(A[t]/k)$. \square

BEWEIS DES SATZES. Sei $H = H_{DR}^p$ und seien $\phi, \psi : A[t] \rightarrow A$ die durch $\phi(t) = 1, \psi(t) = 0$ gegebenen Algebrenhomomorphismen. Da $\phi \iota = \psi \iota = \text{id}_A$ und nach dem Lemma $H(\iota)$ ein Isomorphismus ist, sind auch $H(\psi)$ und $H(\phi)$ Isomorphismen. Sei nun $\gamma : A \rightarrow A[t]$ gegeben durch $\gamma(m_j) = m_j t^j$ für m_j homogen vom Grad j . Da auch $\phi \gamma = \text{id}_A$, ist ebenso $H(\gamma)$ ein Isomorphismus. Folglich ist $H(\psi)H(\iota) = H(\psi \iota)$ der gesuchte Isomorphismus, da $\psi \iota$ gerade die Projektion von A auf A_0 ist. \square

Im folgenden betrachten wir höhere Differentialformen für Punktmengen. Da $\Omega_{S/k}^1$ und $\Omega_{L/k}^1$ zyklische S - bzw. L -Moduln sind, gilt nach Definition des äußeren

Produktes $\Omega_{S/k}^i = 0$ bzw. $\Omega_{L/k}^i = 0$ für $i > 1$. Dies stimmt für S , aufgefaßt als Koordinatenring einer Varietät \mathbb{S} , ja auch mit der geometrischen Intuition überein.

Im folgenden geben wir eine Präsentation für $\Omega_{R/k}^m$ an für $m = 1, \dots, n+1$, die insbesondere impliziert, daß es von Null verschiedene höhere Differentialformen für R/k gibt. Diese bilden allerdings nur einen endlich-dimensionalen Vektorraum. Zur Notation des Ergebnisses sei $N := \{0, \dots, n\}$ und für $I \subseteq N$, $i_0 \in N$ sei

$$\tau_I(i_0) := (-1)^{|\{i \in I : i < i_0\}|}.$$

Für $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $i_1 < \dots < i_k$, sei $dx_I := dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$.

Proposition 3.7. *Sei $m \in \{1, \dots, n+1\}$ und $N_1(m)$ der graduiert-freie P -Modul auf den dx_I ($I \subseteq N$, $|I| = m$) mit $\deg dx_I := m$. Seien f_1, \dots, f_s Erzeuger von $I_{\mathbb{X}}$. Sei $N_2(m)$ der von*

$$\sum_{i_0 \notin I'} \tau_{I'}(i_0) \frac{\partial f_t}{\partial x_{i_0}} dx_{I' \cup \{i_0\}}$$

($t \in \{1, \dots, s\}$, $I' \subseteq N$, $|I'| = m-1$) und $IN_1(m)$ erzeugte Untermodul. Dann gibt es einen Isomorphismus graduierter R -Moduln

$$\Omega_{R/k}^m \cong N_1(m)/N_2(m).$$

BEWEIS. Zur Vereinfachung der Notation sei $\Omega := \overline{\Omega}_{P/k}$. Nach ([8] 4.12) gilt

$$\overline{\Omega}_{R/k} \cong \Omega / \langle I, dI \rangle,$$

wobei $\langle I, dI \rangle$ das von I und dI erzeugte Ideal in der äußeren Algebra bezeichnet. Wir zeigen, daß gilt

$$\langle I, dI \rangle_m = \sum_{J \subseteq N : |J|=m} Idx_J + \sum_{\substack{I' \subseteq N \\ |I'|=m-1}} \sum_{t=1}^s P \cdot \sum_{i_0 \notin I'} \tau_{I'}(i_0) \frac{\partial f_t}{\partial x_{i_0}} dx_{I' \cup \{i_0\}},$$

woraus die Behauptung folgt.

Für $m = 1$ haben wir

$$\langle I, dI \rangle_1 = \Omega_1 \cdot I + \Omega_0 \cdot dI = \sum Idx_i + P \cdot dI.$$

Ist $r = \sum r_i f_i \in I$, so gilt $dr = \sum r_i df_i + f_i dr_i \in \sum_i Idx_i + \sum_t Pdf_t$, womit die Behauptung folgt. Sei induktiv die Behauptung für $m-1$ gezeigt. Beachte, daß gilt

$$\langle I, dI \rangle_m = \Omega_1 \cdot \langle I, dI \rangle_{m-1}.$$

Nun ist

$$\Omega_1 \cdot \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=m-1}} I dx_J = \sum_{\substack{J \subseteq N \\ |J|=m}} I dx_J$$

und für $I' \subseteq N, |I'| = m - 2, i \notin I'$

$$\begin{aligned} dx_i \wedge \sum_{i_0 \notin I'} \tau_{I'}(i_0) \frac{\partial f_t}{\partial x_{i_0}} dx_{I \cup \{i_0\}} &= dx_i \wedge dx_{I'} \sum_j \frac{\partial f_t}{\partial x_j} dx_j \\ &= \pm dx_{I' \cup \{i\}} \sum_j \frac{\partial f_t}{\partial x_j} dx_j \\ &= \pm \sum_{i_0 \notin I' \cup \{i\}} \tau_{I' \cup \{i\}}(i_0) \frac{\partial f_t}{\partial x_{i_0}} dx_{I \cup \{i_0, i\}}, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Wir stellen zunächst einige Folgerungen zusammen, die sich direkt aus der Präsentation ergeben.

Korollar 3.8. a) $\Omega_{R/k}^i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n + 1$.

b) $(\Omega_{R/k}^i)_{2\sigma+1+i} = 0$ für $i = 2, \dots, n + 1$.

c) $\text{HF}_{\Omega_{R/k}^1}(t) = s$ für $t \geq 2\sigma + 3$.

d) Für $j < \alpha(I) - 1$ gilt $\text{HF}_{\Omega_{R/k}^i}(j - i) = \binom{n+j}{j} \binom{n+1}{i}$.

e) Sei $\Delta I \subseteq P$ das von $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($f \in I, i = 0, \dots, n$) erzeugte Ideal in P . Dann gilt

$$\Omega_{R/k}^{n+1} \cong P/\Delta I(-n - 1).$$

BEWEIS.

a) Da \mathbb{X} nicht ausgeartet ist, sind die partiellen Ableitungen von Elementen aus I Formen vom Grad ≥ 1 . Der im Satz angegebene Untermodul N_2 ist also ein echter Untermodul.

b) Nach (1.2) gibt es Formen $g_{ik} \in I$ vom Grad $2\sigma + 3$ mit

$$\bar{d}g_{ik} = x_0^{\sigma+1} f_i dx_k + h_{ik} dx_0 \in \bigoplus_{i=0}^n R dx_i,$$

wobei f_i ein zu P_i gehörender Separator vom Grad $\sigma + 1$ ist, \bar{d} die kanonische Abbildung

$$P \rightarrow \Omega_{P/k} \rightarrow \Omega_{P/k}/I\Omega_{P/k} = \bigoplus_{i=0}^n R dx_i$$

bezeichnet und $h_{ik} \in R_{2\sigma+2}$ ist. Daraus folgt, daß für $m \geq 2$ in $N_2(m)$ alle Elemente der Form $x_0^{\sigma+1} f_i dx_I (|I| = k)$ liegen, denn es ist

$$dx_0 \wedge dg_{ik} = x_0^{\sigma+1} f_i dx_0 \wedge dx_k \in N_2(2)$$

und damit folgt dann auch $fdx_i \wedge dx_j \in N_2(2)$ für alle $f \in R_{2\sigma+2}$ und für alle $0 \leq i, j \leq n$.

Da $(x_0^{\sigma+1} f_j)$ eine k -Basis für $R_{2\sigma+2}$ bildet, folgt die Behauptung.

- c) Da der deRham-Komplex exakt ist, folgt dies sofort aus Teil b).
d) Für die in der Präsentation von $\Omega_{R/k}^i$ angegebenen P -Moduln $N_1(i), N_2(i)$ gilt tautologisch

$$\Omega_{R/k}^i \cong (N_1(i)/IN_1(i))/N_2(i).$$

Dabei gilt $(N_1(i)/IN_1(i)) \cong \bigoplus_{j_1 < \dots < j_i} R dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_i}$, also

$$\mathrm{HF}_{N_1(i)/IN_1(i)}(t) = \binom{n+1}{i} \mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(t-i).$$

Da $N_2(i)$ keine Elemente vom Grad $< \alpha(I) - 1 + i$ enthält, folgt die Behauptung aus der Tatsache $\mathrm{HF}_{\mathbb{X}}(t) = \binom{n+t}{t}$ für $t < \alpha(I)$.

- e) Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß $\Omega_{P/k}^{n+1} = P \cdot dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ mit $\deg dx_0 \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = n+1$. \square

Die Existenz höherer Differentialformen kann intuitiv wie folgt erklärt werden: Ω^k ist ein Funktor auf der Kategorie der Ringe, unterscheidet also nicht zwischen dem Koordinatenring von \mathbb{X} und dem des affinen Kegels $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Der Ursprung ist eine Singularität von \mathbb{Y} ; für $k = \mathbb{R}$ ist keine Umgebung von 0 in \mathbb{Y} eine Untermannigfaltigkeit. Da \mathbb{X} nicht ausgeartet ist, spannen die „Tangentialrichtungen in 0“ den \mathbb{A}^{n+1} auf, was die Existenz höherer Formen plausibel erscheinen läßt. Weiterhin ist anschaulich klar, daß diese Formen Träger in 0 haben, da ja an anderen Punkten \mathbb{Y} und die Normalisierung \mathbb{S} lokal isomorph sind. Aus Nakayamas Lemma folgte dann die Endlichdimensionalität von $\Omega_{R_{\mathbb{X}}/k}^i$, was wir hier direkt gezeigt haben.

Bemerkung 3.9. Aufgrund der Exaktheit des deRham-Komplexes entsprechen geschlossene 2-Formen in eindeutiger Weise Elementen des Torsionsuntermoduls $T\Omega$ von $\Omega_{R/k}$. In [22] wird gezeigt, daß $T\Omega$ von den Elementen der Form

$$x_i dx_j - x_j dx_i$$

für $0 \leq i, j \leq n$ erzeugt wird. Diese entsprechen genau den exakten 2-Formen $2dx_i \wedge dx_j$. \square

Beispiel 3.10. Betrachte 12 generische Punkte im \mathbb{P}^3 . Dann gilt für die Hilbertfunktionen

n	0	1	2	3	4	5	6	7	
$\text{HF}(R)$	1	4	10	12	12	12	12	\dots	
$\text{HF}(\Omega^1)$		4	16	32	25	12	12	\dots	
$\text{HF}(\Omega^2)$			6	24	28	0	0	\dots	
$\text{HF}(\Omega^3)$				4	16	4	0	\dots	
$\text{HF}(\Omega^4)$					1	4	0	\dots	

Die Aussage, daß die alternierende Spaltensumme stets 0 ergibt, ist gerade die Exaktheit des deRham-Komplexes. Die Tatsache, daß

$$\text{HF}_{\Omega^i}(i) = \binom{4}{i} \text{ und } \text{HF}_{\Omega^i}(i+1) = (n+1) \binom{4}{i}$$

folgt daraus, daß für den Initialgrad gilt $\alpha(I) = 2$. \square

In ([22] 4.3) wird für einen vollständigen Durchschnitt $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ vom Typ (d_1, \dots, d_n) gezeigt, daß gilt

$$\text{HF}_{\Omega_{R/k}^1}(t) = (n+1) \text{HF}_{\mathbb{X}}(t-1) - \sum_{k=1}^n \text{HF}_{\mathbb{X}}(t-d_k).$$

Vollständige Durchschnitte gleichen Typs weisen also die gleiche Hilbertfunktion und die gleiche freie Auflösung (vgl. die Bemerkung vor 1.14) sowie die gleiche Hilbertfunktion für Ω^1 auf. Jedoch kann schon Ω^2 zwischen verschiedenen vollständigen Durchschnitten gleichen Typs unterscheiden, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.11. Sei $\mathbb{X}_1 \subseteq \mathbb{P}^2$ die Pseudo-Linearkonfiguration vom Typ $(4, 4)$. Sei \mathbb{X}_2 gegeben durch $I_{\mathbb{X}_2} = \langle \prod_{t=1}^4 (x_2 - tx_0), x_2x_0 - x_1^2 \rangle$. Sowohl \mathbb{X}_1 als auch \mathbb{X}_2 sind vollständige Durchschnitte vom Typ $(2, 4)$. Eine Berechnung zeigt, daß

$$\dim_k \Omega_{\mathbb{X}_2}^3 = 1 \neq 3 = \dim_k \Omega_{\mathbb{X}_1}^3$$

und damit auch $\text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_1}^2} \neq \text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_2}^2}$ ist:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\text{HF}(R)$	1	3	5	7	8	8	8	8	8	\dots
$\text{HF}(\Omega^1)$		3	8	12	15	14	11	9	8	\dots
$\text{HF}(\Omega^2)$			3	6	8	7	3	1	0	\dots
$\text{HF}(\Omega^3)$				1	1	1	0	\dots		

bzw. für \mathbb{X}_2

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\text{HF}(R)$	1	3	5	7	8	8	8	8	8	...
$\text{HF}(\Omega^1)$		3	8	12	15	14	11	9	8	...
$\text{HF}(\Omega^2)$			3	6	7	6	3	1	0	...
$\text{HF}(\Omega^3)$				1	0	...				

Die Kenntnis von drei der vier Hilbertfunktionen $\text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}}^i}$ ($i = 0, \dots, 3$) für $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ legt die vierte fest. Das vorangehende Beispiel zeigte, daß $\text{HF}_{\mathbb{X}}$ und HF_{Ω^1} noch nicht die verbleibenden beiden festlegen. Aber auch $\text{HF}_{\mathbb{X}}$ und HF_{Ω^3} legen die übrigen noch nicht fest.

Beispiel 3.12. Bezeichnet \mathbb{X}_1 die Linearkonfiguration vom Typ $(1, 2, 3, 4)$ und \mathbb{X}_2 die C -Konfiguration C_5 , so haben \mathbb{X}_1 und \mathbb{X}_2 generische Hilbertfunktion und es gilt $\text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_1}^3} = \text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_2}^3} : 0001360\dots$. Da

$$\text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_1}^2} : 0039181530\dots \neq \text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_2}^2} : 0039181650\dots,$$

ist auch $\text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_1}^1} \neq \text{HF}_{\Omega_{\mathbb{X}_2}^1}$. □

Bemerkung 3.13. Geht \mathbb{X}_2 durch linearen Koordinatenwechsel aus \mathbb{X}_1 hervor, stimmen natürlich die Hilbertfunktionen der zu \mathbb{X}_1 und \mathbb{X}_2 assoziierten Differentialmoduln überein. Die Umkehrung stimmt nicht, wie man schon im Fall $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^1$ feststellen kann: Die PGL_2 operiert scharf 3-transitiv auf \mathbb{P}^1 , d.h. drei beliebige Punkte können stets auf $\{0, 1, \infty\}$ abgebildet werden, vier allgemeine Punkte jedoch nicht auf vier vorgegebene Punkte. Da endliche Punktfolgen im \mathbb{P}^1 vollständige Durchschnitte sind, stimmen für zwei Punktfolgen gleicher Kardinalität die Hilbertfunktionen der Koordinatenringe und von Ω^1 überein. Da Ω^3 verschwindet, stimmen auch die Hilbertfunktionen von Ω^2 überein.

Beispiel 3.14. Eine Hilbertfunktion heißt **unimodular**, wenn sie bis zu einem Maximum monoton wächst und dann monoton fällt. Die Pseudo-Linearkonfiguration \mathbb{X} vom Typ $(2, 5, 1, 19, 8)$ zeigt, daß weder HF_{Ω^1} noch HF_{Ω^2} notwendig unimodular sind. In der Tat gilt

$$\begin{aligned} \text{HF}_{\Omega_{R_{\mathbb{X}}}^1} & : 03918304247504947464545464748495052535251504948 \\ & \quad 4746454443424140393837363535\dots \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{HF}_{\Omega_{R_{\mathbb{X}}}^2} & : 0039183036342822201716161616161718171615141312 \\ & \quad 111098765432100\dots \end{aligned}$$

□

Die höheren Differentialformen liefern also eine Fülle von Hilbertfunktionen, von denen neben der von Ω^1 die von Ω^{n+1} am leichtesten kontrollierbar scheint, wie (3.8 e) nahelegt.

Nach Macaulays Basissatz gilt für ein homogenes Ideal I und für eine Termordnung σ die Beziehung $\text{HF}_{P/I} = \text{HF}_{P/\text{LT}_\sigma(I)}$; die Untersuchung von solchen Hilbertfunktionen kann also auf ein im Allgemeinen einfacher zu lösendes kombinatorisches Problem reduziert werden. Für die Berechnung der Hilbertfunktion von Ω^{n+1} stellt sich damit die Frage, ob für eine Gröbnerbasis g_1, \dots, g_t von $I_{\mathbb{X}}$ auch schon $(\frac{\partial}{\partial x_j} g_i : 1 \leq i \leq t, 0 \leq j \leq n)$ eine Gröbnerbasis für ΔI ist – nach Euler ist dies ja zumindest ein Erzeugendensystem von ΔI . Dies wäre z.B. richtig, wenn Derivationen mit der Bildung von Leittermen kommutierten. Dies ist aber im Allgemeinen falsch. Wir geben daneben einige weitere Beispiele, die die Schwierigkeiten bei diesem Zugang verdeutlichen.

Beispiel 3.15.

- a) Sei $P = k[x_0, \dots, x_n]$ und σ eine Termordnung auf P mit $x_{i_0} >_\sigma x_j \forall j \neq i_0$. Für $f_l = \sum_{i=0}^n x_i^l (l \geq 1)$ gilt dann für $i \neq i_0$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \text{LT}_\sigma f_l = 0 \neq \text{LT}_\sigma \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f_l \right) = l x_i^{l-1}.$$

- b) Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^1$ endlich, $|\mathbb{X}| \geq 2$ und f ein Erzeuger von $I_{\mathbb{X}}$, ohne Einschränkung also $f = \prod_{i=1}^s (x_1 - a_i x_0)$. Für eine Termordnung σ auf $k[x_0, x_1]$ mit $x_1 > x_0$ ist f tautologisch Gröbnerbasis von $I_{\mathbb{X}}$. Es gilt

$$\text{LT}_\sigma \frac{\partial}{\partial x_0} f = x_1^{s-1} = \text{LT}_\sigma \frac{\partial}{\partial x_1} f.$$

Also bilden diese Formen keine Gröbnerbasis für ΔI , da $\Omega_{R_{\mathbb{X}}/k}^2$ endlichdimensional ist, aber keine Potenz von x_0 in $\langle \text{LT}_\sigma \frac{\partial}{\partial x_0} f, \text{LT}_\sigma \frac{\partial}{\partial x_1} f \rangle$ liegt.

- c) Ist $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^1$ dreipunktig und $\sigma = \text{DegRevLex}$ eine Termordnung für $P = k[x_0, x_1, x_2]$, so berechnet man

$$\text{HF } \Omega_{(P/\text{LT}_\sigma(I_{\mathbb{X}}))/k}^1(i) = 4 \neq \text{HF } \Omega_{(P/I_{\mathbb{X}})/k}^1(i) = 3$$

für $i \geq 4$. □

Selbst in der simpelsten Klasse von vollständigen Durchschnitten, den vollständigen Gittern gleichen Typs, unterscheiden sich die Hilbertfunktionen von Ω^{n+1} : es

treten arithmetische Gesichtspunkte auf.

Beispiel 3.16. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ gegeben durch $I_{\mathbb{X}} = \langle x_1^{d_1} - x_0^{d_1}, \dots, x_n^{d_n} - x_0^{d_n} \rangle$. \mathbb{X} ist also vollständiges Gitter, die Koordinaten der Punkte sind Einheitswurzeln. Ist ohne Einschränkung $d_1 = \min\{d_i\}$, so gilt

$$\Delta I = \langle x_0^{d_1-1}, x_1^{d_1-1}, \dots, x_n^{d_n-1} \rangle.$$

Damit lassen sich leicht die verschiedenen Hilbertfunktionen ausrechnen.

Ist nun z.B. $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^3$ konkret gegeben durch $I_{\mathbb{X}} = \langle x_1^3 - x_0^3, x_2^3 - x_0^3, x_3^3 - x_0^3 \rangle$ und $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{P}^3$ gegeben durch $\langle \prod_{i=1}^3 (x_1 - ix_0), \prod_{i=1}^3 (x_2 - ix_0), \prod_{i=1}^3 (x_3 - ix_0) \rangle$, so berechnet man $\text{HF}_{\Omega_{R_{\mathbb{X}}/k}^4} : 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1\ 0\ \dots$ und $\text{HF}_{\Omega_{R_{\mathbb{Y}}/k}^4} : 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 4\ 4\ 1\ 0\ \dots$

Beachte jedoch, daß \mathbb{X} und \mathbb{Y} auch unter geometrischen Aspekten verschieden sind, so gilt $|\text{Aut}(\mathbb{X})| > |\text{Aut}(\mathbb{Y})|$. \square

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem theoretischen Resultat. Nach (3.5) gibt es für $i \geq 2$ eine Zerlegung graduierter k -Vektorräume

$$\Omega^i = B_i \oplus Z_i$$

mit $B_i := d\Omega^{i-1}$ und einem komplementären Vektorraum Z_i , sodaß die Einschränkung $d|_{Z_i} : Z_i \rightarrow dZ_i$ ein Isomorphismus ist. „ B “ steht also für die Ränder, „ Z “ für die Zykel. Wir wollen im Folgenden die zugehörigen Projektionen explizit angeben.

Für eine glatte reelle Mannigfaltigkeit M induziert ja ein Vektorfeld X durch Verschränkung eine Abbildung $i_X : \Lambda^i(T^*M) \rightarrow \Lambda^{i-1}(T^*M)$,

$$(i_X(\omega))_x(v_1, \dots, v_{i-1}) := \omega(X_x, v_1, \dots, v_{i-1}) - \omega(v_1, X_x, \dots, v_{i-1}) + \dots + (-1)^{i-2} \omega(v_1, \dots, v_{i-1}, X_x)$$

für $x \in M$ und $v_1, \dots, v_{i-1} \in T_x M$. Da die Euler-Derivation (für $k = \mathbb{R}$) auch als ein Vektorfeld interpretiert werden kann, $e = \sum_{k=0}^n x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, erhalten wir eine „innere Multiplikation“ auf der universellen Differentialalgebra.

Definition 3.17. a) Sei $\mu(e) : \overline{\Omega}_{P/k} \rightarrow \overline{\Omega}_{P/k}$ die P -lineare Abbildung gegeben durch

$$\mu(e)(dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_i}) := \sum_{t=1}^i (-1)^{t+1} x_{j_t} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{j_t}} \wedge \dots \wedge dx_{j_i}.$$

Die induzierte $R_{\mathbb{X}}$ -lineare Abbildung $i(e) : \overline{\Omega}_{R_{\mathbb{X}}/k} \rightarrow \overline{\Omega}_{R_{\mathbb{X}}/k}$ heißt die durch e induzierte **innere Multiplikation** auf $\overline{\Omega}_{R_{\mathbb{X}}/k}$.

b) Die k -lineare Abbildung $L := i(e) \circ d - d \circ i(e)$ heißt **Lie-Ableitung**.

Bemerkung 3.18. Da $\Omega_{P/k}^i$ für $i \geq 0$ ein freier P -Modul ist, ist $\mu(e)$ wohldefiniert. Für die Wohldefiniertheit von $i(e)$ bleibt zu zeigen, daß $\mu(e)(dI)_k \subseteq (dI)_{k-1}$. Dies folgt aber induktiv aus der Tatsache, daß $(dI)_k = \langle (dI)_{k-1} \wedge dx_i : 0 \leq i \leq n \rangle$. Hiermit erklärt sich auch die Vorzeichenwahl von $\mu(e)$.

Für $\overline{\Omega}_{P/k}$ ist der **Hodge-Stern** definiert durch

$$*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := \sigma dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n+1-k}}$$

für $i_1 < \dots < i_k, j_1 < \dots < j_{n+1-k}$, sodaß $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n+1-k})$ eine Permutation von $\{0, \dots, n\}$ mit Signum σ ist. Diese Operation hingegen induziert keine wohldefinierte Abbildung auf dem Quotienten $\overline{\Omega}_{R_{\mathbb{X}}/k}$, denn da $I \neq I^{(2)}$ gibt es ein $f \in I$ und $0 \leq i \leq n$ mit $\frac{\partial f}{\partial x_i} \notin I$, und damit gilt $\omega := \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n \in (dI)_{n+1}$, aber $*\omega = \frac{\partial f}{\partial x_i} \notin I = (dI)_0$. \square

Proposition 3.19. a) Für $\omega \in \Omega^t$ gilt $L\omega = t\omega$.

b) Für $t \geq 1$ sind die kanonischen Projektionen $\pi_1 : \Omega^t \rightarrow Z_t$ und $\pi_2 : \Omega^t \rightarrow B_t$ gegeben durch

$$\pi_1 = \frac{1}{t}i(e) \circ d \quad \text{und} \quad \pi_2 = -\frac{1}{t}d \circ i(e).$$

BEWEIS.

a) Für $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_t}$ gilt

$$\begin{aligned} d \circ i(e)(\omega) &= d(\sum_{j=1}^t f \cdot (-1)^{j+1} x_{i_j} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_t}) \\ &= \sum_{j=1}^t f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_j} \wedge \dots \wedge dx_{i_t} \\ &\quad + \sum_{j=1}^t (-1)^{j+1} x_{i_j} df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \dots \wedge dx_{i_t} \\ &= t\omega + i(e) \circ d(\omega), \end{aligned}$$

woraus aufgrund der Linearität die Behauptung folgt.

b) Nach Teil a) gilt $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}$. Es ist klar, daß $\text{im } \pi_2 \subseteq B_t$ und $B_t \subseteq \ker \pi_2$. Ist andererseits $\omega \in \ker \pi_2$, so gilt $\omega = \pi_1 \omega \in B_t$. Somit gilt $\ker \pi_2 = B_t = \text{im } \pi_1$, was zu zeigen war. \square

Damit schließlich erhalten wir eine weitere exakte Sequenz von graduierten $R_{\mathbb{X}}$ -Moduln.

Proposition 3.20. *Die durch $i(e)$ induzierte Sequenz gradierter $R_{\mathbb{X}}$ -Moduln*

$$0 \rightarrow \Omega^{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^1 \rightarrow R_{\mathbb{X}} \rightarrow R_{\mathbb{X}}/\mathfrak{m} \cong k \rightarrow 0$$

ist exakt.

BEWEIS. Eine Standardrechnung zeigt, daß $i(e) \circ i(e) = 0$. Zu zeigen bleibt, daß für $\omega_1 \in \Omega^j$ mit $i(e)(\omega_1) = 0$ ein $\omega_2 \in \Omega^{j+1}$ existiert mit $\omega_1 = i(e)\omega_2$. Wähle $\omega_2 = \frac{1}{j} \cdot i(e)\omega_1$, dann gilt

$$\omega_1 = (\pi_1 + \pi_2)\omega_1 = d\omega_2.$$

Da $\text{im}(\Omega^1 \rightarrow R_{\mathbb{X}}) = \mathfrak{m}$, folgt auch die Exaktheit bei $R_{\mathbb{X}}$. □

Kapitel 4

Reguläre Differentialformen

Neben holomorphen, ganzen und meromorphen sind die *regulären* Differentialformen von grundlegender Bedeutung, für die wir in diesem Kapitel zwei äquivalente Zugänge beschreiben.

Geometrisch motiviert ist die Konstruktion des Moduls der Obstruktionen, den wir als isomorph zu ersten lokalen Kohomologiegruppe des Koordinatenrings R nachweisen. Der dazu duale Modul, der sogenannte kanonische Modul ω von R , spielt in der Dualitätstheorie eine wichtige Rolle und beinhaltet zudem weitere geometrische Informationen über \mathbb{X} . Neben der häufig gebrauchten Beschreibung von ω als

$$\omega \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{k[x_0]}(R, k[x_0])(-1)$$

beschreiben wir hier ω mittels der kanonischen Residuenabbildung als Untermodul von $\Omega_{L/k}$ und bezeichnen ω als Modul der regulären Differentialformen (im Sinne von Grothendieck).

In einem weiteren Abschnitt zeigen wir, daß dieser Begriff mit dem der regulären Differentialformen im Sinne von Rosenlicht übereinstimmt. Ist die zweite Konstruktion anschaulicher und einfacher für konkrete Berechnungen, so hat die erste doch den Vorteil, in natürlicher Weise funktoriell zu sein und auch leicht auf höhere Dimensionen verallgemeinerbar zu sein.

4.1 Lokale Kohomologie

Sei wie in den vorangegangenen Kapiteln \mathbb{X} ein 0-dimensionales reduziertes Schema, das im \mathbb{P}^n eingebettet und nichtausgeartet ist. Mit \mathbb{Y} wird der zugehörige affine Kegel im \mathbb{A}^{n+1} bezeichnet. Offenbar ist 0 der einzige singuläre Punkt von \mathbb{Y} , also stimmt der reguläre Ort $\mathbb{Y}_{\mathrm{reg}}$ mit dem punktierten Kegel $\overset{\circ}{\mathbb{Y}} := \mathbb{Y} \setminus \{0\}$ überein. Wir betrachten $L = Q^h(R)$ als reguläre Funktionen auf $\overset{\circ}{\mathbb{Y}}$.

Definition 4.1. Als **Modul der Obstruktionen** bezeichnen wir den graduierten R -Modul

$$\text{Obs}(\mathbb{X}) := L/R.$$

Ein Element $m \in \text{Obs}(\mathbb{X}) \setminus \{0\}$ repräsentiert also eine reguläre Funktion auf \mathring{Y} , die nicht Einschränkung einer regulären Funktion auf Y ist.

Beachte, daß $\text{Obs}(\mathbb{X})$ kein endlich erzeugter R -Modul ist. Eine kurze Rechnung zeigt jedoch, daß $\text{Obs}(\mathbb{X})$ ein graduierter Artinscher R -Modul ist: Jede absteigende Kette graduierter R -Untermoduln wird stationär. Diese Tatsache folgt allgemeiner aus der Tatsache, daß $\text{Obs}(\mathbb{X})$ mit der „ersten lokalen Kohomologiegruppe $H_{\mathfrak{m}}^1(R)$ “ übereinstimmt. Dieses wollen wir im folgenden zeigen.

Für einen graduierten Ring R sei $\mathcal{C}(R)$ die Kategorie der \mathbb{Z} -graduerten R -Moduln. Als Morphismus graduierter R -Moduln $f : M \rightarrow N$ verstehen wir dabei ein Element

$$f \in \underline{\text{Hom}}_R(M, N) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(M, N(n)),$$

wobei $N(n)$ den um n gradverschobenen Modul, also $N(n)_k := N_{k+n}$, und $\text{Hom}(M, N(n))$ die homogenen R -linearen Abbildungen $M \rightarrow N(n)$ bezeichnet. Der Funktor $\underline{\text{Hom}}_R(-, N)$ (bzw. $\underline{\text{Hom}}_R(M, -)$) hat abgeleitete Funktoren H^i (bzw. H_i), und es gilt

$$\underline{\text{Ext}}^i(M, N) := H^i(M) = H_i(N).$$

Definition 4.2. Für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ und $M \in \mathcal{C}(R)$ sei

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) := (0 :_M \mathfrak{a})^{\infty} := \{m \in M : \exists n \in \mathbb{N} : \mathfrak{a}^n \cdot m = 0\}.$$

Da $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ ein graduierter Untermodul von M ist und für einen Homomorphismus graduierter R -Moduln $f : M \rightarrow N$ gilt $f(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \Gamma_{\mathfrak{a}}(N)$, ist $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ ein Funktor, der sogenannte **\mathfrak{a} -Torsionsfunktor**.

Beispiel 4.3. Für $R = R_{\mathbb{X}}$ gilt nach (2.9) $\Gamma_{\mathfrak{m}}\Omega_{R/k} = T\Omega$. □

Bemerkung 4.4. Aufgrund der Beziehung $\underline{\text{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, M) \cong (0 :_M \mathfrak{a}^n)$ zeigt man, daß $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ natürlich äquivalent ist zu dem Funktor $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\text{Hom}}_R(R/\mathfrak{a}^n, -)$, vgl. [4], 1.2.11 (iii). Daraus folgt sofort, daß $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ linksexakt ist.

Da $\mathcal{C}(R)$ genügend injektive Objekte besitzt ([3] 3.6.2), gibt es eine injektive Auflösung von M der Form

$$0 \rightarrow M \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots$$

Definition 4.5. Die Kohomologie des Komplexes

$$0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}E^0 \rightarrow \Gamma_{\mathfrak{a}}E^1 \rightarrow \dots$$

heißt **lokale Kohomologie**. Der i . Kohomologie-Modul wird dabei mit $H_{\mathfrak{a}}^i(M)$ bezeichnet.

Bemerkung 4.6. Die abstrakt existierenden rechtsabgeleiteten Funktoren von $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ sind konkret durch die $H_{\mathfrak{a}}^i$ gegeben. In Verallgemeinerung von (3.3) zeigt man die natürliche Äquivalenz von $H_{\mathfrak{a}}^i$ und $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\text{Ext}}_R^i(R/\mathfrak{a}^n, -)$, vgl. [4] ch. 12. Ein Satz von Grothendieck zeigt, daß im vorliegenden Fall $R = R_{\mathbb{X}}$ die höheren Kohomologiefunktoren trivial sind:

Proposition 4.7. Sei $R = R_{\mathbb{X}}$, \mathfrak{m} das maximale homogene Ideal von R und M ein endlich erzeugter graduierter R -Modul. Dann gilt $H_{\mathfrak{m}}^i(M) = 0$ für $i > 1$.

BEWEIS. Da $\dim M := \dim R/(0 :_R M) \leq \dim R = 1$, folgt die Behauptung aus [4], 6.1.2. □

In Analogie zu [4] 2.2.4 und 2.2.7 schließen wir

Satz 4.8. Es gibt einen Isomorphismus graduierter R -Moduln

$$H_{\mathfrak{m}}^1(R) \cong \text{Obs}(\mathbb{X}).$$

BEWEIS. Anwenden des kontravarianten Funktors $\underline{\text{Hom}}_R(-, R)$ auf die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}^n \rightarrow R \rightarrow R/\mathfrak{m}^n \rightarrow 0$$

liefert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_R(R/\mathfrak{m}^n, R) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_R(R, R) & \longrightarrow & \underline{\text{Hom}}_R(\mathfrak{m}^n, R) \\ & & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}_R^1(R/\mathfrak{m}^n, R) & \longrightarrow & \underline{\text{Ext}}_R^1(R, R) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Es gilt $\underline{\text{Hom}}_R(R, R) = R$ und $\underline{\text{Ext}}_R^1(R, R) = 0$ da R projektiver R -Modul ist. Zudem ist $\underline{\text{Hom}}_R(R/\mathfrak{m}^n, R) = (0 :_R \mathfrak{m}^n) = 0$ da $\text{Ann}_R \mathfrak{m}^n \subseteq \text{Ann}_R x_0^n = 0$. Die Sequenz vereinfacht sich also zu

$$0 \rightarrow R \rightarrow \underline{\text{Hom}}_R(\mathfrak{m}^n, R) \rightarrow \underline{\text{Ext}}_R^1(R/\mathfrak{m}^n, R) \rightarrow 0.$$

Da L als Lokalisierung flach über R ist, folgt nach [1] 2.10

$$\underline{\text{Hom}}_R(\mathfrak{m}^n, R) \hookrightarrow L \otimes_R \underline{\text{Hom}}_R(\mathfrak{m}^n, R) \cong \underline{\text{Hom}}_L(L \otimes_R \mathfrak{m}^n, L \otimes_R R) = \underline{\text{Hom}}_L(L, L) = L,$$

somit gilt die klassische Beschreibung als gebrochenes Ideal

$$\underline{\text{Hom}}_R(\mathfrak{m}^n, R) = (\mathfrak{m}^n)^{-1} := \{r \in L : r \cdot \mathfrak{m}^n \subseteq R\}.$$

Desweiteren ist $(\mathfrak{m}^n)^{-1} \subseteq (\mathfrak{m}^k)^{-1}$ für $n \leq k$, und für $f \in L_i$ gilt $f \cdot \mathfrak{m}^{\sigma+1-i} \subseteq R$, also erhalten wir insgesamt

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{Hom}}_R(\mathfrak{m}^n, R) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathfrak{m}^n)^{-1} = L.$$

Da der Funktor $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}}$ kurze exakte Sequenzen respektiert, gibt es eine Sequenz

$$0 \rightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} R \rightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{Hom}}_R(\mathfrak{m}^n, R) \rightarrow \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(R/\mathfrak{m}^n, R) \rightarrow 0,$$

mit obiger Rechnung und (4.4) folglich

$$0 \rightarrow R \rightarrow L \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^1(R) \rightarrow 0,$$

was zu zeigen war. □

Im allgemeinen einfacher zu handhaben als die lokalen Kohomologiemoduln sind ihre Dualmoduln:

Definition 4.9. Sei k ein Körper, R ein \mathbb{Z} -graduierter Ring mit $R_0 = k$ und M ein graduierter R -Modul. Als **Dual** von M wird der graduierte R -Modul

$$M^* := \underline{\mathrm{Hom}}_k(M, k)$$

bezeichnet. Dabei ist die R -Modulstruktur gegeben durch $(r \cdot \phi)(m) := \phi(r \cdot m)$.

Der kontravariante Funktor $D : M \mapsto M^*$ ist ein sogenannter dualisierender Funktor, d.h. er ist R -linear und es gilt $D^2 = 1$, vgl. [1] S.525. Ist M artinscher R -Modul, so ist M^* noethersch und umgekehrt.

Definition 4.10. Der graduierte $R_{\mathbb{X}}$ -Modul

$$\omega := \omega_{\mathbb{X}} := H_{\mathfrak{m}}^1(R_{\mathbb{X}})^*$$

heißt **kanonischer Modul** von $R_{\mathbb{X}}$.

Bemerkung 4.11.

a) Aus der konkreten Beschreibung von $H_{\mathfrak{m}}^1(R)$ folgt

$$\omega \cong \underline{\mathrm{Hom}}_k(L/R, k) = \{\varphi \in \underline{\mathrm{Hom}}_k(L, k) : \varphi(R) = 0\}.$$

Insbesondere gilt für die Hilbertfunktion

$$\mathrm{HF}_{\omega}(t) = s - \mathrm{HF}_R(-t).$$

- b) Da R ein freier $k[x_0]$ -Modul vom Rang $|\mathbb{X}|$ ist, erhält man mit [27] 2.2.8 und 2.2.9 die übliche Beschreibung als

$$\omega \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{k[x_0]}(R, k[x_0])(-1).$$

- c) Man zeigt, daß R genau dann Gorenstein ist, wenn es eine Zahl a gibt mit $R \cong \omega(a)$, vgl. [27] (2.1.3). Im vorliegenden Fall folgt durch Betrachten der Hilbertfunktion, daß gilt $a = \sigma$.
- d) Für eine weitere Beschreibung von ω wird in [30] wie folgt verfahren. Es gibt eine kanonische Einbettung $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[x_0]}(R, k[x_0]) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{k[x_0, x_0^{-1}]}(L, k[x_0, x_0^{-1}])$. Da L ein freier $k[x_0, x_0^{-1}]$ -Modul ist, gibt es eine kanonische Spurabbildung $\mathrm{tr} : L \rightarrow k[x_0, x_0^{-1}]$, die für $f = (a_1 T_1^i, \dots, a_s T_s^i) \in L_i$ gegeben ist als

$$\mathrm{tr} f := \sum_{j=1}^s a_j x_0^i.$$

Mit Hilfe der Spurabbildung tr hat man (nach der Wahl von x_0) einen kanonischen Isomorphismus $\underline{\mathrm{Hom}}_{k[x_0, x_0^{-1}]}(L, k[x_0, x_0^{-1}]) \cong L \cdot \mathrm{tr}$, es gibt folglich also einen R -Untermodul $\mathfrak{C} \subseteq L$ mit

$$\omega \cong \mathfrak{C}(-1).$$

Der Modul $\mathfrak{C} \subseteq L$ wird Dedekindscher Komplementärmodul genannt, und man zeigt ([30]), daß $\mathfrak{C}_{x_0} := x_0^{2\sigma+2} \mathfrak{C}$ ein Ideal von R ist, das sogenannte „kanonische Ideal“.

□

Ist $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ ein Unterschema, bettet der kanonische Modul von $R_{\mathbb{Y}}$ in den von $R_{\mathbb{X}}$ ein.

Proposition 4.12. *Bezeichnet $I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}}$ das Bild von $I_{\mathbb{Y}}$ in $R_{\mathbb{X}}$, so gilt*

$$\omega_{\mathbb{Y}} \cong \{\phi \in \omega_{\mathbb{X}} : I_{\mathbb{Y}/\mathbb{X}} \cdot \phi = 0\}.$$

BEWEIS. Dies folgt nach [27] (2.2.9).

□

Für das weitere Vorgehen ist es wichtig, daß man ω auch als Untermodul von $\Omega_{L/k}$ realisieren kann. Die wesentliche Beobachtung dabei ist, daß die Residuenabbildung für Differentialformen als eine Spezialisierung der gerade definierten Spurabbildung aufgefaßt werden kann.

Definition 4.13. Sei $\tau = \sum_i f_i dx_0 \in \Omega_{L/k}$ eine meromorphe Differentialform auf \mathbb{X} , wobei $f_i = (a_{1,i}T_1^i, \dots, a_{s,i}T_s^i)$ homogen vom Grad i ist. Dann ist das **Residuum von τ (bei 0)** definiert als

$$\text{Res } \tau := \sum_{j=1}^s a_{j,-1}.$$

Proposition 4.14. a) Es gibt einen Isomorphismus gradierter R -Moduln

$$\Omega_{L/k} \cong \underline{\text{Hom}}_k(L, k),$$

der explizit gegeben ist durch

$$\Psi : f dx_0 \mapsto (g \mapsto \text{Res}(g f dx_0)).$$

b) Für den oben definierten Dedekindschen Komplementärmodul \mathfrak{C} gilt damit

$$\omega \cong \mathfrak{C} dx_0.$$

BEWEIS.

a) Dies ist klar, da $\ker \Psi = 0$ und $\dim_k L_i dx_0 = s = \dim_k \text{Hom}_k(L_{-i-1}, k)$.

b) Da $\Omega_{L/k} = L dx_0 \cong L(-1)$, ist auch das klar. □

Bemerkung 4.15. Bezeichnet $\epsilon : k[x_0, x_0^{-1}] \rightarrow k, x_0 \mapsto 0$ den Einsetzungshomomorphismus, so gilt $(\epsilon \circ \text{tr})(f) = \text{Res}(f \frac{dx_0}{x_0})$. Spurabbildungen verallgemeinern also in diesem Sinne die Residuenabbildung.

4.2 Reguläre Differentialformen nach Rosenlicht

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die soeben definierten regulären Differentialformen mit denen im Sinne von Rosenlicht übereinstimmen. Dazu skizzieren wir zunächst die allgemeine Begriffsbildung für reguläre und singuläre Kurven nach [15] und [16].

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper beliebiger Charakteristik und C eine irreduzible nichtsinguläre algebraische Kurve, also eine eindimensionale projektive Varietät. Für einen Punkt $P \in C$ ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{C,P}$ ein diskreter Bewertungsring mit zugehöriger Bewertung v_P . Sei $t = t_P \in k(C)$ mit $v_P(t) = 1$ ein lokaler Parameter bei P . Die Komplettierung bezüglich dieser Bewertung

$\widehat{k(C)}$ ist isomorph zum Körper $k(\widehat{(T)})$ der formalen Potenzreihen in einer Variablen, die Einbettung $\phi : k(C) \hookrightarrow \widehat{k(C)}$ ist explizit gegeben durch $\phi(t_P) = T$. Der Modul der Differentialformen $\Omega = \Omega_{k(C)/k}$ ist ein freier $k(C)$ -Modul vom Rang eins, als Basis von Ω kann man dt_P wählen. Dies ermöglicht es, das Residuum einer Differentialform an einem Punkt zu definieren: Ist $\omega \in \Omega, \omega = f_P dt_P$ und $\phi(f_P) = \sum_{n \geq n_0} a_n T^n$, so sei

$$\text{Res}_P(\omega) := a_{-1}.$$

Man zeigt, daß diese Definition nicht von der Wahl des lokalen Parameters abhängt. Daneben ist $\text{Res}_P \omega \neq 0$ nur für endlich viele P , und es gilt der Residuensatz

$$\sum_{P \in C} \text{Res}_P \omega = 0.$$

Diese Resultate sind also Verallgemeinerungen klassischer Resultate der Funktionentheorie. Der Kalkül läßt sich auf höherdimensionale nichtsinguläre Varietäten ausdehnen, vgl. etwa [10].

Wichtig für uns ist der eindimensionale singuläre Fall. Da der lokale Ring in einer Singularität kein diskreter Bewertungsring ist, läßt sich nicht ohne weiteres von einem Residuum in einem Punkt sprechen. Deshalb betrachtet man eine zugehörige desingularisierte Kurve X' (vgl. [16]). Bezeichnet S den ganzen Abschluß von R_C in $k(C)$, so ist S gerade der Koordinatenring von X' . Beachte, daß der durch die Inklusion $R_C \hookrightarrow S$ induzierte Morphismus $\psi : C' \rightarrow C$ endlich ist.

Die Untergarbe der „regulären Differentialformen ω_X “ der von Ω induzierten Garbe $\widetilde{\Omega}$ ist nun gegeben durch die Halme

$$\omega_{X,x} \ni \omega : \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{O}_{X,x} : \sum_{x' \in \psi^{-1}(x)} \text{Res}_{x'} f\omega = 0.$$

Dabei wird $f\omega$ in der natürlichen Weise als Differentialform auf X' angesehen. In analoger Weise definieren wir für Punktfolgen den Begriff der regulären Differentialform.

Definition 4.16. *Eine meromorphe Differentialform $\tau \in \Omega_{L/k}$ heißt regulär, wenn gilt*

$$\text{Res } f\tau = 0 \quad \forall f \in R.$$

Als **reguläre Differentialformen auf \mathbb{X}** bezeichnen wir den R -Modul

$$\text{RD}(\mathbb{X}) := \{\omega \in \Omega_{L/k} : \omega \text{ ist regulär}\}.$$

Wie angekündigt entsprechen die regulären Differentialformen dem kanonischen Modul, interpretiert als Untermodul von $\Omega_{L/k}$.

Satz 4.17. *Es gibt Isomorphismen graduierter R -Moduln*

$$\mathrm{RD}(\mathbb{X}) \cong \omega \cong \mathfrak{C}dx_0.$$

BEWEIS. Ist $\tau \in \mathrm{RD}(\mathbb{X})$, so ist $\varphi_\tau : g \rightarrow \mathrm{Res}(g\tau) \in \underline{\mathrm{Hom}}_k(L, k)$ mit $\varphi_\tau(R) = 0$, d.h. $\varphi_\tau \in \omega$ nach (4.11 a). Andererseits definiert ein $\phi \in \underline{\mathrm{Hom}}_k(L, k)$ eine Differentialform τ_ϕ nach (4.14), die regulär ist, wenn gilt $\phi(R) = 0$. \square

Bemerkung 4.18. Auch in der vorliegenden Situation stimmen also die regulären Differentialformen im Sinne von Grothendieck, definiert als Dual der höchsten nicht verschwindenden Kohomologie $H_m^1(R)$, mit denen im Sinne von Rosenlicht über das Residuum definierten regulären Differentialformen überein. Daneben gibt es verschiedene Ansätze, diesen Begriff allein ringtheoretisch zu definieren, vgl. etwa die monumentale Konstruktion in [9]. Die dort gewonnene Allgemeinheit läßt sich jedoch nur beschwerlich in einer konkreten Situation anwenden, so daß wir im folgenden stets reguläre Differentialformen als

$$\omega \cong \mathfrak{C}dx_0$$

auffassen werden.

Kapitel 5

Die Fundamentalklassen-Abbildung

Sei M eine orientierbare glatte reelle Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann sind die singulären Homologiegruppen (bzw. Kohomologiegruppen) mit Koeffizienten in einem Ring R , bezeichnet mit $H_i(M, R)$ bzw. $H^i(M, R)$, und die deRham-Kohomologiegruppen $H_{DR}^i(M)$ erklärt.

Nach dem Satz von de Rham ([5] S.44) sind die deRham-Kohomologiegruppen isomorph zu den singulären Kohomologiegruppen mit Koeffizienten aus \mathbb{R} :

$$H_{DR}^i(M) \cong H^i(M, \mathbb{R}).$$

Aus der schwachen Form der Poincaré-Dualität ([5] S.56) folgt der Isomorphismus

$$H_k(M, \mathbb{R})^* \cong H^{n-k}(M, \mathbb{R}).$$

Für eine reelle Untermannigfaltigkeit V der Dimension k mit der induzierten Orientierung und eine $k-1$ -Form τ gilt nach dem Satz von Stokes ([5] S.60)

$$\int_V d\tau = 0,$$

damit induziert V ein Funktional $i_V \in (H_{DR}^k)^*$. Das dadurch nach Poincaré und deRham eindeutig bestimmte Element $c_V \in H_{DR}^{n-k}(M)$ heißt **Fundamentalklasse von V** .

Es ist nicht ohne weiteres klar, wie man dieses Konzept in einen algebraischen Kontext überträgt, ist ja im vorliegenden Fall die deRham-Kohomologie trivial. Da die lokale Kohomologie nicht verschwindet, ist es motiviert, auch ein Element $c(\mathbb{Y}) \in \omega_{\mathbb{X}}$ für $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ als Fundamentalklasse von \mathbb{Y} zu bezeichnen. Für die Konstruktion einer solchen Abbildung verfährt man in zwei Schritten:

1. Da $\omega_{\mathbb{Y}} \subseteq \omega_{\mathbb{X}}$, reicht es, ein kanonisches Element $c(\mathbb{Y}) \in \omega_{\mathbb{Y}}$ zu konstruieren.

2. „Identifiziere“ \mathbb{Y} mit dem Koordinatenring $R_{\mathbb{Y}}$ und betrachte $\omega_{\mathbb{Y}}$ als Untermodul von $\Omega_{L_{\mathbb{Y}}/k}$ für $L_{\mathbb{Y}} := Q^h(R_{\mathbb{Y}})$. Zeige, daß das Bild der Einschränkung der universellen Derivation $d : L_{\mathbb{Y}} \rightarrow \Omega_{L_{\mathbb{Y}}/k}$ auf $R_{\mathbb{Y}}$ ein Untermodul von $\omega_{\mathbb{Y}}$ ist. Dabei ist zu beachten, daß die konstruierte Abbildung $R_{\mathbb{X}} \rightarrow \omega_{\mathbb{X}}$ durch $\Omega_{R_{\mathbb{X}}/k}$ faktorisiert, es reicht also die Konstruktion von $c : \Omega_{R_{\mathbb{X}}/k} \rightarrow \omega$. Dies wollen wir im folgenden ausführen.

Sei also $\omega = \mathfrak{C}dx_0$ der kanonische Modul von $R = R_{\mathbb{X}}$, interpretiert als Untermodul von $\Omega_{L/k}$. In $\Omega_{L/k}$ gilt $dx_i = \frac{x_i}{x_0}dx_0$. Bezeichnet $\varphi : \Omega_{R/k} \rightarrow L \otimes \Omega_{R/k} = \Omega_{L/k}$ die kanonische Abbildung, so gilt also $\varphi(\sum f_i dx_i) = (\sum f_i \frac{x_i}{x_0})dx_0$. Für das Bild von φ gilt damit im $\varphi = \mathfrak{m} \cdot \frac{1}{x_0}dx_0 \subseteq \omega$, denn ganze Differentialformen sind trivialerweise regulär, und es gilt $\frac{\mathfrak{m}}{x_0} \subseteq S \subseteq \mathfrak{C}$.

Die induzierte Abbildung bezeichnen wir mit $c_{\mathbb{X}}$.

Definition 5.1. *Der homogene R -Homomorphismus*

$$c_{\mathbb{X}} : \Omega_{R/k} \rightarrow \omega, \sum_i f_i dx_i \mapsto \sum_i f_i \frac{x_i}{x_0} dx_0$$

heißt **Fundamentalklassen-Abbildung von \mathbb{X}** . $c(dx_0)$ heißt die **Fundamentalklasse von \mathbb{X}** .

Die Fundamentalklassen-Abbildung induziert nach der universellen Eigenschaft von Ω eine R -Derivation $\delta : R \rightarrow \omega$. Eine explizite Angabe von δ gibt also einen anderen Zugang zu Fundamentalklassen.

Unter der Spurabbildung tr verstehen wir im folgenden die Abbildung

$$(a_1, \dots, a_s) \mapsto \sum_{i=1}^s a_i \in \underline{\text{Hom}}_k(L, k)_0 = \omega_0.$$

Proposition 5.2. *Die Derivation $\delta : R \rightarrow \omega$ ist gegeben durch $\delta(r) = e(r) \cdot \text{tr}$ für die Eulerderivation e von R .*

BEWEIS. Die Spur entspricht dem Element $\frac{1}{x_0}dx_0 \in \Omega_{L/k}$. Für $r \in R_m$ gilt

$$\varphi(dr) = \varphi\left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} dx_i\right) = \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} x_i\right) \cdot \frac{1}{x_0} dx_0 = mr \cdot \frac{1}{x_0} dx_0 = e(r) \cdot \text{tr},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Die erste sich stellende Frage ist die nach Kern und Bild der Fundamentalklasse.

Definition 5.3. *Der Cokern $J_{\mathbb{X}}$ von $c_{\mathbb{X}}$ heißt der **Jacobi-Modul von \mathbb{X}** .*

Damit erhalten wir eine fundamentale exakte Sequenz.

Proposition 5.4. *Die Sequenz graduerter R -Moduln*

$$0 \longrightarrow T\Omega \longrightarrow \Omega_{R/k} \longrightarrow \omega_{\mathbb{X}} \longrightarrow J_{\mathbb{X}} \longrightarrow 0$$

ist exakt.

BEWEIS. Zu zeigen ist nur $\ker c_{\mathbb{X}} = T\Omega$. Dies ist aber klar nach der Definition des Torsionsuntermoduls (2.9). \square

Daneben stellt sich die Frage nach der Surjektivität von $c_{\mathbb{X}}$, d.h. wann $J_{\mathbb{X}} = 0$. Wir berechnen dazu die Hilbertfunktion von $J_{\mathbb{X}}$.

Proposition 5.5. *Für die Hilbertfunktion von $J = J_{\mathbb{X}}$ gilt*

$$\text{HF}_J(t) = s - \text{HF}_{\mathbb{X}}(|t|).$$

Insbesondere ist $J_{\mathbb{X}} = 0$ genau dann, wenn \mathbb{X} aus nur einem Punkt besteht.

BEWEIS. Es gilt $\text{im } c_{\mathbb{X}} = \frac{\mathfrak{m}}{x_0} dx_0$, d.h.

$$\text{HF}_{\text{im } c_{\mathbb{X}}}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \text{HF}_{\mathbb{X}}(t) & t > 0 \end{cases}$$

Damit ist für $t \neq 0$

$$\text{HF}_J(t) = \text{HF}_{\omega}(t) - \text{HF}_{\text{im } c_{\mathbb{X}}}(t) = s - \text{HF}_{\mathbb{X}}(-t) - \text{HF}_{\mathbb{X}}(t) = s - \text{HF}_{\mathbb{X}}(|t|),$$

und dies gilt auch für $t = 0$. \square

Beispiel 5.6. In [20] wird gezeigt, daß es für gegebene $r, t \geq 1$ Level-Schemata $\mathbb{X}_{(t,r)}$ gibt mit $\sigma_{\mathbb{X}} + 1 = r$ und $\text{CM}(R_{\mathbb{X}}) = t$. Die Idee besteht darin, ein nulldimensionales Lex-Segment-Ideal zu konstruieren, dessen Hilbertfunktion in einem gewissen Sinn maximal ist, und dieses dann zu liften. Für $\mathbb{X} = \mathbb{X}_{(10,4)}$ ist nach [20] 3.4 und 3.7 die Castelnuovo-Funktion gegeben durch $\Delta \text{HF}_{\mathbb{X}} : 1 \ 3 \ 6 \ 8 \ 10 \ 0 \dots$, also $\text{HF}_{\mathbb{X}} : 1 \ 4 \ 10 \ 18 \ 28 \ 28 \dots$.

Damit gilt für die Hilbertfunktion von $J_{\mathbb{X}}$

$$\begin{array}{cccccccccccc} n & \cdots & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \text{HF}(J_{\mathbb{X}}) & \cdots & 0 & 10 & 18 & 24 & 27 & 24 & 18 & 10 & 0 & \cdots \end{array}$$

\square

Die Fundamentalklassen-Abbildung ist ein ausgezeichnetes Element in $\underline{\text{Hom}}_R(\Omega_{R_{\mathbb{X}}/k}, \omega_{\mathbb{X}})$. Wenn $R = R_{\mathbb{X}}$ Gorenstein ist, so hat dieser R -Modul eine einfache Beschreibung:

$$\underline{\text{Hom}}_R(\Omega_{R/k}, \omega_{\mathbb{X}}) \cong \underline{\text{Hom}}_R(\Omega_{R/k}, R)(\sigma) \cong \text{Der}_R(R, R)(\sigma).$$

Nach dem graduierten Dualitätssatz ([27] 2.6.1) gilt daneben

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega_{R/k}, \omega) = H_m^1(\Omega_{R/k})^*.$$

Im allgemeinen Fall erhalten wir eine weitere Beschreibung (vgl. auch [32] §3).

Proposition 5.7. *Es gibt eine exakte Sequenz graduierter R -Moduln*

$$0 \rightarrow R \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega, \omega) \rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(J, \omega) \rightarrow 0.$$

BEWEIS. Es gilt für $\Omega = \Omega_{R/k}$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega/T\Omega, \omega) = \{\phi \in \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega, \omega) : \phi(T\Omega) = 0\} = \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega, \omega)$$

da ω torsionsfrei ist. Anwenden des Funktors $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-, \omega)$ auf die Sequenz

$$0 \rightarrow \Omega/T\Omega \rightarrow \omega \rightarrow J \rightarrow 0$$

liefert also

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(J, \omega) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(\omega, \omega) \rightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega, \omega) \\ &\rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(J, \omega) \rightarrow \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(\omega, \omega). \end{aligned}$$

Da J Torsionsmodul ist, ist auch $\underline{\mathrm{Hom}}_R(J, \omega) = 0$. Durch Lokalisierung erhält man nach dem Lokal-Global-Prinzip $\underline{\mathrm{Ext}}_R^1(\omega, \omega) = 0$ nach ([6] 6.1) und $\underline{\mathrm{Hom}}_R(\omega, \omega) \cong R \cdot \mathrm{id}$ nach ([6] 6.1 d). \square

Ist \mathbb{Y} ein Unterschema von \mathbb{X} , so hat man eine Surjektion $\pi : \Omega_{\mathbb{X}} \rightarrow \Omega_{\mathbb{Y}}$ und eine Inklusion $\iota : \omega_{\mathbb{Y}} \hookrightarrow \omega_{\mathbb{X}}$. Kombiniert man (5.4) für \mathbb{X} und \mathbb{Y} , erhält man ein (nicht kommutierendes) Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T\Omega_{\mathbb{X}} & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{X}} & \xrightarrow{c_{\mathbb{X}}} & \omega_{\mathbb{X}} & \longrightarrow & J_{\mathbb{X}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \iota & & & & \\ 0 & \longrightarrow & T\Omega_{\mathbb{Y}} & \longrightarrow & \Omega_{\mathbb{Y}} & \xrightarrow{c_{\mathbb{Y}}} & \omega_{\mathbb{Y}} & \longrightarrow & J_{\mathbb{Y}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es stellt sich somit die Frage, wie sich $p := \iota \circ c_{\mathbb{Y}} \circ \pi$ verhält. Sei also $\mathbb{Y} = \{P_1, \dots, P_t\} \subseteq \mathbb{X} = \{P_1, \dots, P_s\}$.

Proposition 5.8. *Sei $\tau = \sum_{i=0}^n f_i dx_i \in \Omega_{R_{\mathbb{X}}/k}$ vom Grad m und sei*

$$f = (a_1 T_1^{m-1}, \dots, a_s T_s^{m-1})$$

das Bild von $\sum_{i=0}^n f_i x_i$ im ganzen Abschluß S von $R_{\mathbb{X}}$. Identifiziert man $(\omega_{\mathbb{X}})_m$ kanonisch mit einem Unterraum des k^s , so gilt $p(\tau) = (a_1, \dots, a_t, 0, \dots, 0)$.

BEWEIS. Identifiziert man $(\omega_{\mathbb{Y}})_m$ mit einem Unterraum des k^t , so ist die Inklusion $(\omega_{\mathbb{Y}})_m \rightarrow (\omega_{\mathbb{X}})_m$ gerade die kanonische Inklusion $k^t \hookrightarrow k^s$. Da der ganze Abschluß von $R_{\mathbb{Y}}$ in einer kanonischen Weise ein Quotient von S ist, folgt $c_{\mathbb{Y}} \circ \pi(\tau) = (a_1, \dots, a_t)$ und damit die Behauptung. \square

Das Diagramm legt auch nahe zu untersuchen, ob es einen Morphismus $J_{\mathbb{Y}} \rightarrow J_{\mathbb{X}}$ gibt. Mit anderen Worten: Ω ist ein kovarianter, ω ein kontravarianter Funktor — ist dann auch J in natürlicher Weise ein Funktor? Auf dem Vektorraum-Niveau bedeutet das nur einen Vergleich der Hilbertfunktionen, den wir hier für $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ durchführen.

Bemerkung 5.9. Für $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ gilt $\text{HF}_{J_{\mathbb{Y}}} \leq \text{HF}_{J_{\mathbb{X}}}$.

BEWEIS. Nach obiger Formel ist für $|\mathbb{X}| = s, |\mathbb{Y}| = s - i$ zu zeigen, daß gilt $\text{HF}_{\mathbb{Y}} \geq \text{HF}_{\mathbb{X}} - i$. Dies ist klar, da

$$\text{HF}_{\mathbb{Y}}(d) = \text{rk}(t(P))_{P \in \mathbb{Y}, t \in \mathbb{T}_d} \geq \text{rk}(t(P))_{P \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{T}_d} - i = \text{HF}_{\mathbb{X}}(d) - i,$$

denn die erste Matrix geht durch Streichen von i Zeilen aus der zweiten hervor. \square

Mittels der in [25] §3 angegebenen Beschreibung von $\omega_{\mathbb{X}}$ läßt sich auch zeigen, daß $J_{\mathbb{Y}}$, aufgefaßt als $k[x_0]$ -Modul, ein direkter Summand des $k[x_0]$ -Moduls $J_{\mathbb{X}}$ ist. Da $\omega_{\mathbb{Y}}$ keine natürliche $R_{\mathbb{X}}$ -Modulstruktur trägt, kann auch $J_{\mathbb{Y}}$ nicht in kanonischer Weise als $R_{\mathbb{X}}$ -Modul betrachtet werden, da ja $\omega_{\mathbb{Y}}$ und $J_{\mathbb{Y}}$ in nichtpositiven Graden übereinstimmen; das Bilden des Jacobi-Moduls ist also nicht funktoriell.

Beispiel 5.10. Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ t -uniform für ein $t \in \{1, \dots, \Delta_{\mathbb{X}}\}$ und $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $|\mathbb{Y}| = |\mathbb{X}| - t$. Da $\text{HF}_{\mathbb{Y}}$ und $\text{HF}_{\mathbb{X}}$ erst für $t \geq \sigma + 1$ verschieden sind, erhält man

$$\text{HF}_{J_{\mathbb{Y}}}(t) = \max(\text{HF}_{J_{\mathbb{X}}}(t) - t, 0).$$

Ist beispielsweise $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^2$ ein vollständiger Durchschnitt vom Typ (5,5), so ist \mathbb{X} ein Cayley-Bacharach-Schema und für $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $|\mathbb{Y}| = |\mathbb{X}| - 1$ gilt

n	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\text{HF}(J_{\mathbb{X}})$	0	1	3	6	10	15	19	22	24	22	19	15	10	6	3	1	0
$\text{HF}(J_{\mathbb{Y}})$	0	0	2	5	9	14	18	21	23	21	18	14	9	5	2	0	0

Ist hingegen $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ nicht 1-uniform, so gibt es ein Unterschema $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ mit $|\mathbb{Y}| = |\mathbb{X}| - 1$ und $\text{HF}_{J_{\mathbb{Y}}}(\sigma_{\mathbb{X}}) = \text{HF}_{J_{\mathbb{X}}}(\sigma_{\mathbb{X}})$. \square

Kapitel 6

Der Jacobi-Modul

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Cokern der Fundamentalklassenabbildung $J := J_{\mathbb{X}} = \text{coker } c_{\mathbb{X}}$. Da holomorphe Differentialformen trivialerweise regulär sind, repräsentiert also ein Element $\omega \in J \setminus \{0\}$ gerade eine „interessante“ reguläre Differentialform.

Genau dann ist $J = 0$, wenn \mathbb{X} aus nur einem Punkt besteht. Sei also im weiteren stets $|\mathbb{X}| > 1$ vorausgesetzt. Die Hilbertfunktion von J bietet keine neuen Informationen, so kann man sofort HF_J für generische Punktmengen oder andere Klassen von Punkten angeben. Interessant hingegen ist die Struktur von J als R -Modul, auf die wir hier näher eingehen. Motiviert sind diese Betrachtungen aus der Tatsache, daß die Struktur des kanonischen Moduls geometrische Informationen enthält. Diese sind in den nichtpositiven Komponenten von ω enthalten, überleben also auch in J . Sind die positiven Komponenten von ω trivial, beinhalten die positiven Komponenten von J als Quotient von ω jedoch noch weitere Informationen.

Als erstes klären wir die Frage nach einem Erzeugendensystem von J als R -Modul. In [19] wird ein effizienter Algorithmus zur Angabe einer Präsentation des kanonischen Moduls gegeben. Wichtig für unsere Zwecke ist die dort angegebene Beschreibung eines Erzeugendensystems für ω .

Proposition 6.1. *Seien t_1, \dots, t_s eine $k[x_0]$ -Basis von R , so daß die Bilder von t_1, \dots, t_k eine Basis des Sockels von R/x_0R bilden. Sei die zugehörige duale Basis gegeben durch $p_1, \dots, p_s \in \underline{\text{Hom}}_{k[x_0]}(R, k[x_0])$, d.h. $p_i(t_j) = \delta_{ij}$. Dann bilden die sogenannten „Sockelprojektionen“ p_1, \dots, p_k ein minimales Erzeugendensystem von $\underline{\text{Hom}}_{k[x_0]}(R, k[x_0])$ und damit für ω .*

BEWEIS. [19] 4.4. □

Faßt man ω auf als $\mathfrak{C}dx_0 \subseteq \Omega_{L/k}$, so gilt also $\omega = \langle g_i dx_0 \rangle$ für gewisse $g_i \in L$ mit $\text{Res}(t_i g_j dx_0) = \delta_{ij}$.

Damit erhalten wir

Proposition 6.2. *Die Bilder eines minimalen Erzeugendensystems von ω bilden ein minimales Erzeugendensystem von J . Insbesondere ist die Kardinalität eines solchen Erzeugendensystems gleich dem Cohen-Macaulay-Typ von R .*

BEWEIS. Wäre 1 ein Sockelelement, so folgte $x_i = c_i x_0$ für gewisse $c_i \in K$ ($i = 1, \dots, n$) und damit bestünde \mathbb{X} aus nur einem Punkt. Also gilt für die Grade der g_i die Beziehung $\deg g_i = -\deg t_i - 1 < -1$, d.h. ω wird in Graden < 0 erzeugt. Daher bilden die Bilder der Sockelprojektionen in J ein minimales Erzeugendensystem, da ja $J_i = \omega_i$ für $i \leq 0$. Daraus folgen die Behauptungen. \square

Bemerkung 6.3. Ist R Gorenstein, so ist ω zyklischer R -Modul und damit auch J , sodaß in diesem Fall J eine R -Algebrenstruktur aufweist. Allgemeiner definiert man die **Jacobi-Algebra** als

$$\tilde{J} := R / \text{Ann}_R J,$$

vgl. etwa [35].

Die Namensgebung erklärt sich aus folgendem Spezialfall.

Proposition 6.4. *Sei $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ ein vollständiger Durchschnitt, $I_{\mathbb{X}} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ mit $\deg f_i = d_i$. Bezeichne $D := \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ die Determinante der Jacobi-Matrix. Dann gilt*

$$J \cong R / \langle x_0 D, \dots, x_n D \rangle \left(\sum_{i=1}^n d_i - 1 \right).$$

BEWEIS. Sei $g_0 := x_0$ und $g_i := f_i$ für $i = 1, \dots, n$. Die Folge (g_0, g_1, \dots, g_n) ist damit regulär für $I_{\mathbb{X}} + \langle x_0 \rangle$; nach [7] F.9 wird der Sockel von $P/(I + \langle x_0 \rangle) \cong R/\langle x_0 \rangle$ erzeugt von $\det\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=0,\dots,n \\ j=0,\dots,n}} = D$. Nach dem Jacobi-Kriterium ([7] VII.1.5) ist D Nichtnullteiler, da der affine Teil von \mathbb{X} glatt ist. Also kann man als Sockelprojektion $\frac{1}{sD}$ verwenden, d.h. $\omega = \langle \frac{1}{D} \frac{dx_0}{x_0} \rangle$. Damit gilt $R = D\omega$ und folglich $J = \omega/dR \cong R/\langle \mathfrak{m}D \rangle \frac{dx_0}{x_0} (\sum_{i=1}^n (d_i - 1))$, denn $\deg D = \sum_{i=1}^n (d_i - 1)$. \square

Eine explizite Beschreibung der homogenen Komponenten von J liegt ebenfalls auf der Hand.

Proposition 6.5. Für $i \in \mathbb{Z}$ fasse R_i und J_i als Unterräume des k^s in der kanonischen Weise auf. Sei \langle, \rangle die nicht-ausgeartete Paarung gegeben durch

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^s a_j b_j.$$

Für $i \leq 0$ gilt dann

$$J_i = (R_{-i})^\perp := \{v \in k^s \mid \langle v, w \rangle = 0 \forall w \in R_{-i}\}$$

und für $i > 0$ ist

$$J_i \cong k^s / R_i.$$

Damit sind also J_i und J_{-i} kanonisch isomorph.

BEWEIS. Die Einschränkung der Spur auf eine homogene Komponente ist gerade \langle, \rangle . Da für $i \leq 0$ stets $J_i = \omega_i$ gilt, folgt die erste Aussage aus der expliziten Beschreibung von ω in (4.11 a), wonach gilt $\omega_{-i} = \{\varphi \in \text{Hom}_k(L_i, k) \mid \varphi(R_i) = 0\}$. Die restlichen Aussagen sind klar. \square

Definition 6.6. Die k -Vektorraum-Dimension $\mu(\mathbb{X})$ von $J_{\mathbb{X}}$ heißt **Milnor-Zahl** von \mathbb{X} . Bezeichnet $\delta(R) := \dim_k(S/R)$ den **Grad der Singularität** von \mathbb{X} , so gilt

$$\mu(\mathbb{X}) = 2\delta(R) - s + 1.$$

In der Tat ist $\mu(\mathbb{X}) = \sum_{t=-\sigma}^{\sigma} s - \text{HF}_{\mathbb{X}}(|t|) = 2\left(\sum_{t=0}^{\sigma} s - \text{HF}_{\mathbb{X}}(t)\right) - s + 1$.

Bemerkung 6.7. Ist M ein gradierter $R_{\mathbb{X}}$ -Modul, so gilt für die Länge $l(M)$ von M als R -Modul, definiert als Supremum aller Längen von aufsteigenden Ketten gradierter Untermoduln $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \dots \subsetneq M_n = M$, daß $l(M) = \dim_k M$, da $R_0 = k$. Die analogen Aussagen im lokalen Fall, d.h. für eine nicht notwendig (quasi-)homogene Kurve, benutzen daher den allgemeineren Längenbegriff, vgl. etwa [37],[21] und [32]. \square

Ist $\sigma = 0$, so besteht eine nicht ausgeartete Punktmenge $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ aus $n + 1$ generischen Punkten und für die Milnor-Zahl gilt $\mu(\mathbb{X}) = n$, also gibt es stets Punktmenge mit vorgeschriebener Milnor-Zahl.

Aus der fundamentalen exakten Sequenz allein kann keine Aussage über die Abhängigkeit der Längen von J und $T\Omega$ getroffen werden, da ja HF_J durch $\text{HF}_{\mathbb{X}}$ festgelegt ist, nicht jedoch $\text{HF}_{T\Omega}$. Für vollständige Durchschnitte kann man jedoch schon mithilfe von (1.14) eine genaue Aussage treffen.

Proposition 6.8.

- a) Ist \mathbb{X} arithmetisch Gorenstein, so gilt $\dim_k J = \sigma s + 1$.
- b) Für einen vollständigen Durchschnitt $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ vom Typ (d_1, \dots, d_n) gilt

$$\dim_k J = \dim_k T\Omega = \prod_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n d_i - n + 1.$$

BEWEIS. Sei abkürzend $H := \text{HF}_{\mathbb{X}}$.

- a) Nach (1.10 c) gilt $H(t) = s - H(\sigma - t)$, also

$$\begin{aligned} \dim_k J &= \sum_{t=1}^{\sigma} s - H(t) + \sum_{t=0}^{\sigma} s - H(t) \\ &= \sum_{t=1}^{\sigma} H(\sigma - t) + \sum_{t=0}^{\sigma} s - H(t) \\ &= \sigma s + 1. \end{aligned}$$

- b) Da $\Omega = T\Omega \oplus dR$, gilt für $t \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{HF}_{T\Omega}(t) &= (n+1)H(t-1) - \sum_{i=1}^n H(t-d_i) - H(t) \\ &= \sum_{i=1}^n H(t-1) - H(t-d_i) + H(t-1) - H(t) \end{aligned}$$

und damit

$$\dim_k T\Omega = s \sum_{i=1}^n (d_i - 1) - s + 1 = \sigma s + 1$$

da für $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\sum_{t=0}^{\infty} H(t) - H(t-k) = k \cdot s$. Nach (1.14 c) ist $s = \prod_{i=1}^n d_i$ und $\sigma = \sum_{i=1}^n d_i - n - 1$, womit die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 6.9. Analog zu [29] kann man schließen, daß die Zahl

$$\gamma(\mathbb{X}) := \dim_k J_{\mathbb{X}} - \dim_k T\Omega_{\mathbb{X}} + \dim_k I_{\mathbb{X}}^{(2)} / I_{\mathbb{X}}^2$$

unter gerader Liaison invariant bleibt. Da für einen vollständigen Durchschnitt $I_{\mathbb{X}}^{(2)} = I_{\mathbb{X}}^2$ gilt, für einen Punkt \mathbb{X} jedoch $J_{\mathbb{X}} = T\Omega_{\mathbb{X}} = 0$ ist und jeder vollständiger Durchschnitt gerade zu einem Punkt liiert ist, erhält man damit einen anderen Beweis des vorangehenden Satzes. \square

Wie in [25], [31] gezeigt wird, hat die R -Modulstruktur von ω Konsequenzen für die Geometrie von \mathbb{X} . Wir wollen im folgenden die R -Modulstruktur von J untersuchen und erinnern dazu an zwei Ergebnisse über ω .

Eine k -lineare Abbildung $\mu : U \otimes V \rightarrow W$ endlichdimensionaler k -Vektorräume heißt dabei biinjektiv, wenn aus $\mu(u \otimes v) = 0$ bereits $u = 0$ oder $v = 0$ folgt.

- Proposition 6.10.** a) \mathbb{X} ist genau dann ein Cayley-Bacharach-Schema, wenn gilt $\text{Ann } \varphi = \{0\}$ für ein generisches Element $\varphi \in \omega_{-\sigma}$.
- b) Für $0 \leq i \leq \sigma$ ist \mathbb{X} ist genau dann $s - \text{HF}_{\mathbb{X}}(i)$ -uniform, wenn die Multiplikationsabbildung $R_j \otimes \omega_{-j} \rightarrow \omega_0$ biinjektiv ist für alle $j \in \{i, \dots, \sigma\}$.
- c) \mathbb{X} ist in linear allgemeiner Lage genau dann, wenn für alle $i \in \{1, \dots, \sigma\}$ die Abbildung $R_1 \otimes \omega_{-i} \rightarrow \omega_{-i+1}$ biinjektiv ist.

BEWEIS. a) [25] 3.5), b) [31] 3.2, c) [31] 4.2. □

Diese Ergebnisse werfen also Licht auf die Modulstruktur für die nichtpositiven Komponenten von J .

Bevor wir zu einem Ergebnis über die Multiplikation in den positiven Komponenten kommen, merken wir an, daß sich die Multiplikation mit Nichtnullteilern in R wie erwartet verhält.

Lemma 6.11. Sei $r \in R_d$ ein homogener Nichtnullteiler. Dann operiert r mit maximalem Rang auf J , d.h. bezeichnet $\mu_{r,i} : J_i \rightarrow J_{i+d}$, $\varphi \mapsto r \cdot \varphi$ die Multiplikationsabbildung, so gilt

$$\text{rank } \mu_{r,i} = \min(\dim J_i, \dim J_{i+d})$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Identifiziert man R_d in der kanonischen Weise mit einem Unterraum des k^s , so geht r über in ein $v = (v_1, \dots, v_s)$ mit $v_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, s$ da r ein NNT ist. Faßt man J_i und J_{i+d} als Unterräume bzw. Faktorräume des k^s auf, so wird $\mu_{r,i}$ durch die Multiplikation mit der invertierbaren Diagonalmatrix $\text{diag}(v_1, \dots, v_s)$ induziert. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 6.12. Sei $r \in R_d$ homogen und $I := \{i \in \{1, \dots, s\} \mid r(P_i) = 0\}$. Für $i_0 \geq 0$ ist die Multiplikationsabbildung $\mu_r : J_{i_0} \rightarrow J_{i_0+d}$ surjektiv genau dann, wenn es für alle $i \in I$ einen Separator für P_i in R_{i_0+d} gibt.

BEWEIS. Ohne Einschränkung ist $I = \{1, \dots, m\}$ für $m = |I|$. Sei $v_i := r(P_i)$ und $V := \text{diag}(v_1, \dots, v_s)$ der zu μ_r assoziierte Endomorphismus des k^s . Genau dann ist μ_r surjektiv, wenn gilt

$$\text{coker } V \cong \langle e_1, \dots, e_m \rangle \subseteq R_{i_0+d}$$

bei der Identifizierung von R_{i_0+d} mit einem Unterraum des k^s . Da bei dieser Identifizierung die Bilder von Separatoren gerade die kanonischen Basisvektoren sind, folgt die Behauptung. □

Satz 6.13. *Äquivalent sind:*

- a) \mathbb{X} ist ein Cayley-Bacharach-Schema.
- b) Ist für $r \in R_d$ ($d \leq \sigma$) die Multiplikationsabbildung $\mu_r : J_{\sigma-d} \rightarrow J_\sigma$ surjektiv, so ist r ein Nichtnullteiler.

BEWEIS. Die erste Bedingung ist äquivalent damit, daß alle minimalen Separatoren Grad $\sigma + 1$ haben. Dies ist nach den vorangegangenen Lemmata gleichbedeutend mit der zweiten Aussage. \square

Literaturverzeichnis

- [1] D. Eisenbud, „Commutative algebra with a view towards algebraic geometry“, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer, New York (1995)
- [2] D. Eisenbud, „Geometry of Syzygies“, Springer, New York (2005)
- [3] W. Bruns und J. Herzog, „Cohen-Macaulay Rings“, Cambridge University Press, Cambridge (1993)
- [4] M.P. Brodmann und R.Y. Sharp, „Local Cohomology: an algebraic introduction with geometric applications“, Cambridge University Press, Cambridge (1998)
- [5] P. Griffiths und J. Harris, „Principles of Algebraic Geometry“, John Wiley Sons, New York (1978)
- [6] J. Herzog und E. Junz, „Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings“, Lect. Notes in Math. **238**, Springer, Berlin (1971)
- [7] E. Kunz, „Einführung in die algebraische Geometrie“, Vieweg, Braunschweig (1997)
- [8] E. Kunz, „Kähler Differentials“, Adv. Lect. in Math., Vieweg, Braunschweig (1986)
- [9] E. Kunz und R. Waldi, „Regular Differential Forms“, Contemporary Math. **79**, Amer. Math. Soc., Providence (1988)
- [10] E. Kunz, „Residuen und Dualität auf projektiven algebraischen Varietäten“, Der Regensburger Trichter 19, Universität Regensburg (1986)
- [11] M. Kreuzer, „Beiträge zur Theorie nulldimensionaler Unterschemata projektiver Räume“, Regensburger Math. Schr. **26**, Universität Regensburg (1998)
- [12] M. Kreuzer und L. Robbiano, „Computational Commutative Algebra 1“, Springer, New York (2000)

-
- [13] M. Kreuzer und L. Robbiano, „Computational Commutative Algebra 2“ (erscheint)
- [14] I. R. Shafarevich, „Basic Algebraic Geometry I“, Springer, New York (1994)
- [15] J. Silverman, „The Arithmetic of Elliptic Curves“, Springer, New York (1986)
- [16] J.-P. Serre, „Algebraic Groups and Class Fields“, Springer, New York (1988)
- [17] M. P. doCarmo, „Differential forms and applications“, Springer, New York (1994)
- [18] A.V. Geramita (edt.): The Curves Seminar at Queens vol. IX, Queen’s papers in pure and applied mathematics no. 95, Kingston 1993
- [19] S. Beck und M. Kreuzer, How to compute the canonical module of a set of points, in: L. Gonzáles-Vega und T. Recio (Hrsg.), Algorithms in Algebraic Geometry and Applications, Proc. Conf. MEGA '94, Santander 1994, Progress in Math. **143**, Birkhäuser, Basel 1996, S. 51-78.
- [20] A.M. Bigatti und A.V. Geramita, Level Algebras, Lex Segments, and Minimal Hilbert Functions, Communications in Algebra **31** (2003), 1427-1451.
- [21] R.O. Buchweitz und G.-M. Greuel, The Milnor Number and Deformations of Complex Curve Singularities, Inventiones math. **58** (1980), 241-281.
- [22] G. de Dominicis und M. Kreuzer, Kähler Differentials for Points in \mathbb{P}^n , J. Pure App. Algebra **141** (1999), 153-173.
- [23] D. Eisenbud und E.G. Evans Jr., Every Algebraic Set in n -Space Is the Intersection of n Hypersurfaces, Inv. Math. **19** (1973), 107-112.
- [24] A. Galligo, Exemples de Points in Position Uniforme, in: T. Mora und C. Traverso (Hrsg.): Effective Methods in Algebraic Geometry, Proc. Conf. MEGA '90, Progress in Math. **94**, Birkhäuser, Boston 1991, 105-117.
- [25] A.V. Geramita, M. Kreuzer und L. Robbiano, Cayley-Bacharach-Schemes and their canonical modules, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 163-189.
- [26] A.V. Geramita, J. Migliore und L. Sabourin, The first infinitesimal neighborhood of a linear configuration of points in \mathbb{P}^2 , Preprint.
- [27] S. Goto und K. Watanabe, On graded rings I, J. Math. Soc. Japan **30** (1978), 179-213.

-
- [28] J. Harris, The genus of space curves, *Math. Ann.* **249** (1980), 191-204.
- [29] J. Herzog und R. Waldi, Differentials of linked curve singularities, *Arch. Math.* **42** (1984), 335-343.
- [30] M. Kreuzer, On the Canonical Ideal of a Set Of Points, *Bol. Un. Math. Ital.* **8** (2000), 221-261.
- [31] M. Kreuzer, On the Canonical Module of a 0-dimensional scheme, *Can. J. Math* **46** (1994), 357-379.
- [32] E. Kunz und R. Waldi, Über den Derivationenmodul und das Jacobi-Ideal von Kurvensingularitäten, *Math. Z.* **187** (1984), 105-123.
- [33] J. Migliore und C. Peterson, A symbolic test for (i, j) -uniformity in reduced zero-schemes, *J. Symb. Comp.* **37** (2004) 403-413.
- [34] M. Nagata, On the 14th Problem of Hilbert, *Amer. J. Math* **81** (1959), 766-772.
- [35] A. Oneto und E. Zatini, When the Jacobian algebra of a curve singularity is Gorenstein, *Arch. Math.* **64** (1995), 203-208.
- [36] L.G. Roberts, Kähler differentials and HC_1 of certain graded K -Algebras, in: J.F. Jardine, V.P. Snaith (Eds.), *Algebraic K-Theory: Connections with Geometry and Topology*, Proc. Conf. Lake Louise, 1987, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1989), 389-424.
- [37] J.M. Wahl, The Jacobian algebra of a graded Gorenstein singularity, *Duke Math. J.* **55** (1987), 843-871.

Anhang A

Dokumentation verwendeter Programme

Für die im Text angegebenen Berechnungen wurde ein CoCoA-Paket „Differentialformen.cpkg“ geschrieben, dessen bereitgestellte Funktionen kurz dokumentiert werden. Dieses Paket befindet sich auf der beiliegenden CD, ebenso wie Dateien der Form Bsp*.*.coc, die die im Text behandelten Beispiele berechnen.

Alle Rechnungen wurden auf einem Intel Pentium 4 mit 3 GHz und 512 MB RAM unter WinCoCoA 4.3 durchgeführt

`Alpha(I: Ideal), Sigma(K: Ring): Int`

Alpha berechnet den Initialgrad eines Ideals, Sigma liefert für den Koordinatenring K einer Punktmenge \mathbb{X} die Zahl $\sigma_{\mathbb{X}}$.

`Lift(L: List): Ideal`

Für ein nulldimensionales Lex-Segment-Ideal $J = \langle x_1^{a_{11}} \cdots x_n^{a_{1n}}, \dots, x_1^{a_{t1}} \cdots x_n^{a_{t,n}} \rangle$ und $L := [[a_{11}, \dots, a_{1n}], \dots, [a_{t1}, \dots, a_{tn}]]$ erzeugt Lift das Verschwindungsideal $I \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ einer projektiven Punktmenge $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $I + \langle x_0 \rangle / \langle x_0 \rangle \cong J$.

`CKonfiguration(T: Integer, N: Integer): Ideal`

Es werden T Geraden der Form $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ (a_i zufällig aus $(-N, N)$) berechnet und das Verschwindungsideal der paarweisen Schnittpunkte zurückgegeben.

LinearKonfiguration(L: List): Ideal

Berechnet für $L = [k_1, \dots, k_s]$ das Verschwindungsideal der Pseudo-Linearkonfiguration vom Typ (k_1, \dots, k_s) .

Orbit(P:List): List

Für $P = [p_1, \dots, p_n]$ liefert Orbit die Menge aller Tupel der Form $[p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(n)}]$ für eine Permutation $\sigma \in S_n$ d.h. gerade den Orbit von (p_1, \dots, p_n) unter der symmetrischen Gruppe.

IstUnimodular(L: List): Boolean

Für eine Liste von Hilbertfunktionswerten prüft IstUnimodular, ob diese unimodular ist.

Omega(K: Int, Erzeuger: List): Module

Für das Ideal $I_{\mathbb{X}} \subseteq P = k[x_0, \dots, x_N]$ mit Erzeugern g_1, \dots, g_t berechnet Omega eine Präsentation des P -Moduls $\Omega_{P/I_{\mathbb{X}}}^K$. Dieses geschieht wie folgt: Zunächst werden Listen L_1, L_2 aller $(K-1)$ - bzw. K -elementigen Teilmengen von $\{0, \dots, N\}$ angelegt. Für $I \in L_2$ bezeichne $j(I)$ die Position von I in L_2 und $T := \text{Len}(L_2)$. Wie in Proposition (3.7) angegeben, kann $\Omega_{P/I}^K$ realisiert werden als Quotient von P^T mit kanonischen Basisvektoren $e_{j(I)}$ ($I \in L_2$). Zunächst kann der Quotient $P/I_{\mathbb{X}}^T$ präsentiert werden durch P^T/N_1 mit $N_1 = \langle Fe_{i(I)} : F \in \text{Erzeuger} \rangle$. Es bleibt die weiteren Relationen $\langle df \wedge dx_J : f \in \text{Erzeuger}, |J| = K-1 \rangle$ zu realisieren. Dazu wird für alle $F \in \text{Erzeuger}$ und alle $I \in L_1$ der Ausdruck

$$s_{f,I} := \sum_{i \notin I} (-1)^{\iota(i,I)} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{j(I \cup \{i\})}$$

gebildet für $\iota(i, I) := |\{j \in I \mid j < i\}|$. Dabei wird die Berechnung von $\iota(i, I)$ und $j(I \cup \{i\})$ von Unterroutinen übernommen. Für den dadurch erzeugten Untermodul $N_2 := \langle s_{f,I} \rangle$ gilt dann schließlich

$$\Omega_{P/I}^K \cong P^T / (N_1 + N_2)(K),$$

da die Basisvektoren e_I zunächst Gewicht 0 haben. Zurückgegeben wird diese Präsentation des gradverschobenen Moduls.

`Omega1(Erzeuger: Liste): HilbertFn,`

`OmegaN1(Erzeuger: Liste): HilbertFn`

Diese Funktionen berechnen direkt die Hilbertfunktionen der ersten und letzten Differentialmoduln. Dabei kann aufgrund des Isomorphismus (3.8 e) Ω^{N+1} direkt als gradverschobener Quotient von P berechnet werden.

`TOmega(Erzeuger: Liste)`

Berechnet wird ein Untermodul U von $\oplus_i Rdx_i$, so daß für $\Omega^1 = \oplus_i Rdx_i/dI$ gilt $T\Omega = U + dI/dI$. Der Modul U wird dabei als Saturierung $dI : x_0^\infty$ berechnet. Dabei gilt nach den Gradschranken (3.8 c) schon $U = dI : \langle x_0^{2\sigma+4} \rangle$, was für die Berechnung benutzt wird. Die Hilbertfunktion von $T\Omega$ kann damit entweder über $\text{HF}_{T\Omega} = \text{HF}_U - \text{HF}_{dI}$ oder über $\text{HF}_{T\Omega}(t) = \text{HF}_\Omega(t) - \text{HF}_R(t) (t \geq 1)$ angegeben werden.

`LenTOmega(Erzeuger: List)`

Berechnet wird die Dimension des Torsionsuntermoduls von Ω^1 über die Differenz der Hilbertfunktionen von $R_{\mathbb{X}}$ und Ω^1 .

`SymbolischesQuadrat(L: List): Ideal`

Berechnet für $L = [[p_{1,0}, \dots, p_{1,n}], \dots, [p_{t,0}, \dots, p_{t,n}]]$ das symbolische Quadrat des Verschwindungsideals von $\mathbb{X} = \{(p_{1,0} : \dots : p_{1,n}), \dots, (p_{t,0} : \dots : p_{t,n})\}$

`LenTorsionI2(L: List): Int`

Berechnet für eine Liste von Punkten die Länge des P/I -Torsionsuntermodul $I^{(2)}/I^2$ von I/I^2 , d.h. die Codimension von $I^{(2)}$ in I^2 .

`BerechneDFormen(Erzeuger: Liste)`

Für die Erzeuger des Verschwindungsideals $I_{\mathbb{X}} \subseteq P := k[x_0, \dots, x_N]$ wird eine formatierte Liste der Hilbertfunktionswerte von 0 bis $2\sigma_{\mathbb{X}} + 4$ ausgegeben von $R := P/I_{\mathbb{X}}, \Omega_{R/k}^1, \dots, \Omega_{R/k}^{N+1}$.

`SingDeg(R: Ring), Milnorzahl(R: Ring)`

Für eine Punktmege \mathbb{X} gegeben durch den Koordinatenring $R = R_{\mathbb{X}}$ werden der Grad der Singularität und die Milnorzahl berechnet.

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Dortmund, 19.05.05