TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Dr. Jens Zumbrägel 5. Dez. 2016

4. Übungsblatt zur Angewandten Algebra

zyklische Codes

1. Betrachte den Hamming-Code $C = \mathrm{Ham}_2(3) := \{x \in \mathbb{F}_2^7 \mid Hx^t = 0\}$, wobei

$$H := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimme eine Erzeugermatrix G für den Code C.

   b) Bei einer Übetragung wird der Vektor $y = (\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,) \in \mathbb{F}_2^7$ empfangen. Wenn höchstens ein Fehler aufgetreten ist, welches Codeword $c \in C$ wurde gesendet?

2. Bestimme alle binären zyklischen Codes ungerader Länge $n \leq 13$.

3. Zeige für den ternären $[4, 2, 3]$ Hamming-Code $C = \mathrm{Ham}_3(2)$:

   a) C ist nicht zyklisch,

   b) C ist *negazyklisch*, d. h. ein Ideal im Ring $\mathbb{F}_3[X]/(X^4 + 1)$.

4. Sei p eine beliebige Primzahl.

   a) Zeige, dass $X^4 + 1$ nicht irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ ist.

   b) Folgere, dass $X^n + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ für $n > 2$ nicht irreduzibel ist.

5. Finde für $n = 31$ und geplantem Minimalabstand $\delta = 3, 5, 7, ...$ die Dimension k der binären BCH-Codes. Welche sind gemäß http://www.codetables.de optimal?

6. Sei $n = 15$ und $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$.

   a) Zeige, dass $\omega := x = [X] \in \mathbb{F}_{16}$ eine n-te primitive Einheitswurzel ist.

   b) Betrachte den BCH-Code $C := \{f \in \mathbb{F}_2[X]/(X^{15}-1) \mid f(\omega) = f(\omega^3) = 0\}$. Zu

$$y = (\,1101\ 1010\ 0100\ 000\,)$$

   berechne das Syndrom $s = \big(y(\omega^i)\big)_{i\in\{1..4\}}$. (Antwort: $s = (x^{11}, x^7, x^7, x^{14})$.)

   c) Angenommen, y sei empfangen und bei der Übertragung seien bis zu $t = 2$ Fehler aufgetreten, dann finde die Fehlerpositionen.