Carl von Ossietzky
Universität Oldenburg
Diplomstudiengang Mathematik

DIPLOMARBEIT

Modular-Theorie und die Konstruktion nicht-kommutativer L_p-Räume nach Haagerup

vorgelegt von: **Jens Zumbrägel**

Betreuender Gutachter: **Prof. Dr. Andreas Defant**
Zweiter Gutachter: **Prof. Dr. Michael Langenbruch**

Oldenburg, 21. Oktober 2004

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den Integrationsraum $L_p(\mathcal{M})$ zu einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ zu definieren, sowie die hierfür benötigten theoretischen Grundlagen ausführlich darzustellen.

Wir geben kurz die Definition einer von Neumann-Algebra. Es sei H ein komplexer Hilbetraum und $\mathcal{L}(H)$ die C^*-Algebra der beschränkten linearen Operatoren auf H. Die Halbnormen

$$x \mapsto |\langle x\xi, \eta\rangle| \quad (\xi, \eta \in H)$$

definieren eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{L}(H)$, welche schwächer als die Norm-Topologie ist. Eine *von Neumann-Algebra*

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$$

ist eine bezüglich dieser Topologie abgeschlossene *-Subalgebra mit $\mathbf{1}$. Eine von Neumann-Algebra ist damit insbesondere eine C^*-Algebra. Allerdings besitzt sie stärkere Abschlusseigenschaften, welche beispielsweise eine Reichhaltigkeit von Projektionen implizieren. Der Prototyp einer kommutativen von Neumann-Algebra ist die Algebra $L_\infty(\mu)$ der Äquivalenzklassen beschränkter, messbarer Funktionen.

Die Theorie der von Neumann-Algebren begann mit einer Serie fundamentaler Arbeiten von F. J. Murray und J. von Neumann (*On rings of operators I-IV*, Ann. Math., 1936-1943) und hat sich in den folgenden Jahren bis heute zu einem riesigen Forschungsgebiet entwickelt. Die oben angedeuteten Eigenschaften einer von Neumann-Algebra sind ein Grund dafür, weshalb man diese Theorie auch als eine *nicht-kommutative Theorie messbarer Funktionen* bezeichnet.

Für eine Integrationstheorie benötigt man ein positives Funktional $f \mapsto \int f$ („Integral"), welches man im klassischen, also kommutativen Fall mittels eines Maßes oder als Erweiterung eines Daniell-Funktionals gewinnt. Diesem Funktional entspricht im Nichtkommutativem eine *Spur*

$$x \mapsto \tau(x),$$

also ein positives Funktional auf einer von Neumann-Algebra, welches invariant unter unitären Transformationen $x \mapsto u^*xu$ ist. Spuren wurden bereits bei Murray und von Neumann betrachtet, und Ausarbeitungen einer nicht-kommutativen Integrationstheorie mit einer Spur veröffentlichten I. E. Segal (*A non-commutative extension of abstract integration*, Ann. of Math. **57**, 1953) und J. Dixmier (*Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs*, Bull. Soc. Math. France **81**, 1953).

Allerdings besitzt nicht jede von Neumann-Algebra eine „sinnvolle" Spur (d. h. eine *normale*, *semifinite*, *treue* Spur, siehe Abschnitt 1.10), und man kannte zunächst kein hilfreiches Mittel, um diese von Neumann-Algebren vom sog. *Typ III* zu untersuchen und weiter zu klassifizieren.

M. Takesakis Monografie (*Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*, Springer 1970), eine überarbeitete Version einer wenig beachteten Arbeit von Tomita aus dem Jahre 1967, brachte einen neuen Impuls für die Behandlung der von Neumann-Algebren vom Typ III. Hier wird zu einem „sinnvollen" *Gewicht* (siehe Abschnitt 1.10), welches jede von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ besitzt, eine Gruppe $\{\sigma_t^\varphi\}_{t\in\mathbb{R}}$ von *-Automorphismen von $\mathcal{M}$ definiert, die sog. *modulare Automorphismus-Gruppe.* Hierdurch ergeben sich gewisse Invarianten, die eine feinere Klassifikation der von Neumann-Algebren vom Typ III ermöglichen.

Weiterhin war die Konstruktion einer gewissen Erweiterungsalgebra $\mathcal{N}$ zu einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$, dem sog. *gekreuzten Produkt* bezüglich der modularen Automorphismusgruppe bedeutsam. Denn einerseits kann durch zweimaliges Anwenden dieser Konstruktion die ursprüngliche von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ zurückgewonnen werden, und andererseits besitzt die Erweiterungsalgebra $\mathcal{N}$ eine sinnvolle Spur τ.

Dies ist der Ausgangspunkt der Konstruktion nicht-kommutativer L_p-Räume zu beliebigen von Neumann-Algebren, wie sie von U. Haagerup (*L^p-spaces associated with an arbitrary von Neumann algebra*, Colloques internationaux du CNRS **274**, 1979) entwickelt und von M. Terp in einem Preprint [Ter81] ausgearbeitet wurde. Die Elemente des Raumes $L_p(\mathcal{M})$ sind hierbei gewisse, im Allgemeinen *unbeschränkte*, Operatoren, die mit dem gekreuzten Produkt $\mathcal{N}$ *affiliiert* (siehe Abschnitt 2.3) sind, sowie *messbar* (siehe Abschnitt 3.2) bezüglich der Spur τ sind.

Von Neumann-Algebren, Spuren, Gewichte und Zustände werden in Kapitel 1 definiert, wo auch die wichtigsten Grundlagen hierzu entwickelt werden.

Das Kapitel 2 widmet sich den unbeschränkten Operatoren, welche vor allem in den nachfolgenden Kapiteln 3 und 4 von Bedeutung sind. Speziell werden hier ausführlich mit einer von Neumann-Algebra affiliierte Operatoren behandelt, sowie eine Spektraltheorie und ein Borel'scher Funktionenkalkül entwickelt.

In Kapitel 3 wird die Theorie der bezüglich einer Spur messbaren Operatoren dargestellt, die für die Konstruktion der Haagerup-L_p-Räume in Kapitel 6 notwendig ist. Weiterhin wird kurz auf die L_p-Räume mit einer Spur eingegangen.

Eine Darstellung der Modular-Theorie findet man in Kapitel 4 und die Konstruktion des gekreuzten Produkts wird in Kapitel 5 erklärt. Um die Darstellung etwas zu vereinfachen, setzen wir hierbei voraus, dass die von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ auf einem separablen Hilbertraum H operiert. Solche von Neumann-Algebren besitzen stets einen treuen, normalen Zustand (siehe Abschnitt 1.9), und wir betrachten die modulare Automorphismusgruppe zu diesem Zustand.

In Kapitel 6 schließlich wird der Haagerup-L_p-Raum $L_p(\mathcal{M})$ zu einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ definiert, sowie eine Norm auf $L_p(\mathcal{M})$ konstruiert, mit der diese Räume zu Banachräumen werden.

Es wird vorausgesetzt, dass der Leser mit den Grundlagen der Funktionalanalysis vertraut ist. Wichtige Präliminarien, insbesondere C^*-Algebren und den Operatoren auf einem Hilbertraum betreffend, sind in einem Anhang zusammengestellt.

Obwohl es mein Bemühen war, die theoretischen Grundlagen für die Konstruktion der Haagerup-L_p-Räume vollständig mit Beweisen darzulegen, musste ich leider aus Zeit- und Platzgründen einige Ergebnisse, insbesondere im Kapitel 6, ohne Beweis zitieren.

Danken möchte ich an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Andreas Defant, weil er in mir das Interesse an der Funktionalanalysis geweckt hat und mich bei der Diplomarbeit wohlwollend unterstützt hat. Die Arbeit an dem von ihm vorgeschlagenen Thema hat mir trotz einiger Anstrengung sehr viel Freude bereitet, und ich fand die intensive Beschäftigung mit der Theorie der von Neumann-Algebren interessant und bereichernd.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Familie, bei meinen Freunden und bei allen Personen bedanken, die mich in irgendeiner Weise bei der Diplomarbeit unterstützt haben. Hierbei gilt Felix Fontein, Alina Rull und Axel Sprenger ein besonderer Dank für das sorgfältige Korrekturlesen meines langen Manuskripts.

1. Von Neumann-Algebren

Eine ausführlichere Darstellung der Notationen und Präliminarien findet sich im Anhang. An dieser Stelle wollen wir nur die notwendigsten Notationen zusammenstellen.

Eine C^*-Algebra A möge stets eine $\mathbf{1}$ beinhalten, ebenso *-Unteralgebren von A; desweiteren soll $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ für alle *-Homomorphismen $\varphi : A \to B$ zwischen C^*-Algebren A und B gelten. Wir bezeichnen das Spektrum eines Elements $x \in A$ mit $\operatorname{Sp} x$ und den Spektralradius mit $\rho(x)$. Ferner sei

$$A_{\mathrm{sa}} := \{x \in A \mid x \text{ selbstadjungiert}\}, \quad A_+ := \{x \in A \mid x \text{ positiv}\},$$
$$A_{\mathrm{proj}} := \{e \in A \mid e \text{ Projektion}\}.$$

Die Grundzüge der Theorie der von Neumann-Algebren werden in diesem Kapitel entwickelt. Quellen hierzu sind die Bücher [KaR83], [KaR86], [Mur90] und [Fil96].

1.1. Die starke und schwache Operator-Topologie

Auf der C^*-Algebra $\mathcal{L}(H)$ der beschränkten, linearen Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum H erweisen sich neben der Norm-Topologie weitere lokalkonvexe Topologien als nützlich (vgl. [Wer02], Beispiel VIII.1(j)).

Definition. *Die* starke Operator-Topologie *auf $\mathcal{L}(H)$ ist die durch die Halbnormen*

$$x \mapsto \|x\xi\| \quad (x \in \mathcal{L}(H), \xi \in H)$$

definierte lokalkonvexe Topologie; die schwache Operator-Topologie *auf $\mathcal{L}(H)$ ist durch die Halbnormen*

$$x \mapsto |\langle x\xi, \eta\rangle| \quad (x \in \mathcal{L}(H), \xi, \eta \in H)$$

definiert.

Bemerkung. (1) Die Normtopologie ist stärker als die starke Operator-Topologie, welche wiederum stärker als die schwache Operator-Topologie ist.

Konvergiert ein Netz $\{x_\alpha\}$ in $\mathcal{L}(H)$ in Norm gegen 0, so konvergiert auch $\{x_\alpha\xi\}$ in H gegen 0, für alle $\xi \in H$; d. h. Normkonvergenz impliziert starke Operator-Konvergenz. Ist ferner ein Netz $\{x_\alpha\}$ in $\mathcal{L}(H)$ konvergent gegen 0 in starker Operator-Topologie, gilt also $x_\alpha\xi \longrightarrow 0$ für alle $\xi \in H$, so folgt $\langle x_\alpha\xi, \eta\rangle \longrightarrow 0$ für alle $\xi, \eta \in H$, d. h. $\{x_\alpha\}$ konvergiert in der schwach-Operator-Topologie gegen 0.

(2) Die Involution $x \mapsto x^*$ ist schwach-Operator-stetig; denn gilt $x_\alpha \longrightarrow x$ in schwacher Operator-Topologie, so gilt $\langle x_\alpha^*\xi, \eta\rangle = \langle \xi, x_\alpha\eta\rangle \longrightarrow \langle \xi, x\eta\rangle = \langle x^*\xi, \eta\rangle$ für alle $\xi, \eta \in H$, d. h. $x_\alpha^* \longrightarrow x^*$ in schwacher Operator-Topologie.

(3) Die Involution $x \mapsto x^*$ ist jedoch nicht stark-Operator-stetig, falls $\dim H = \infty$. Denn ist $(\varepsilon_n)_n$ ein Orthonormalsystem in H und sei

$$x_n \in \mathcal{L}(H), \quad x_n\xi := \langle \xi, \varepsilon_n \rangle \varepsilon_1 \quad (n \in \mathbb{N}, \xi \in H),$$

so gilt $x_n\xi \longrightarrow 0$ für alle $\xi \in H$, jedoch $\langle x_n^*\varepsilon_1, \varepsilon_n \rangle = \langle \varepsilon_1, x_n\varepsilon_n \rangle = 1$ für alle n, und damit $x_n^*\varepsilon_1 \not\longrightarrow 0$.

(4) Sicherlich ist die Involution $x \mapsto x^*$ normstetig. Aus (2) und (3) folgt daher, dass im Fall $\dim H = \infty$ weder Norm- und starke Operator-Topologie, noch starke und schwache Operator-Topologie übereinstimmen.

Proposition 1.1.1.

(1) *Für ein lineares Funktional $\omega : \mathcal{L}(H) \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(1a) *ω ist stark-Operator-stetig,*

(1b) *ω ist schwach-Operator-stetig,*

(1c) *$\omega = \sum_{j=1}^{n} \langle \cdot \xi_j, \eta_j \rangle$ mit gewissen $\xi_j, \eta_j \in H$.*

(2) *Eine konvexe Menge $S \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist genau dann stark-Operator-abgeschlossen, wenn sie schwach-Operator-abgeschlossen ist.*

Beweis. (1) Klar ist $(1c) \Rightarrow (1b) \Rightarrow (1a)$, zu $(1a) \Rightarrow (1c)$ siehe [Wer02], Beispiel VIII.2(c) oder [Mur90], Theorem 4.2.6.

(2) Siehe [Wer02], Satz VIII.3.5, zweiter Spezialfall, oder [Mur90], Theorem 4.2.7. □

Bemerkung. (1) Ist $S \subseteq \mathcal{L}(H)$ ein schwach-Operator-abgeschlossener Teilraum und $y \notin S$, so existiert ein schwach-Operator-stetiges Funktional ω auf $\mathcal{L}(H)$, so dass $\omega|_S \equiv 0$ und $\omega(y) \neq 0$; dies kann man leicht aus dem Trennungssatz für lokalkonvexe Räume folgern (siehe etwa [Wer02], VIII.2.12).

(2) Die Multiplikation ist im Allgemeinen nicht stark-Operator-stetig auf $\mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H)$ (ohne Beweis), wohl aber auf $S \times \mathcal{L}(H)$, wenn $S \subseteq \mathcal{L}(H)$ beschränkt ist; dies folgt aus der Ungleichung

$$\|(xy - x_0y_0)\xi\| \leq \|x\|\|(y - y_0)\xi\| + \|(x - x_0)y_0\xi\| \quad (x, y, x_0, y_0 \in \mathcal{L}(H), \xi \in H).$$

(3) Die Menge $\mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$ aller selbstadjungierten Operatoren und die abgeschlossene Einheitskugel $B_{\mathcal{L}(H)}$ sind schwach-Operator-abgeschlossen. Das zeigen die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}} \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R} \text{ für alle } \xi \in H, \\ x \in B_{\mathcal{L}(H)} \quad &\Leftrightarrow \quad |\langle x\xi, \eta \rangle| \leq 1 \text{ für alle } \xi, \eta \in B_H. \end{aligned}$$

Jede monoton steigende, beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert gegen ihr Supremum; ein analoges Resultat gilt für $\mathcal{L}(H)$ mit starker Operator-Topologie:

Satz 1.1.2. *Es sei $\{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$ ein monoton steigendes (d. h. $x_\alpha \leq x_\beta$ falls $\alpha \leq \beta$), nach oben beschränktes Netz. Dann existiert $\sup_\alpha x_\alpha$ und es gilt*

$$\lim_\alpha x_\alpha = \sup_\alpha x_\alpha \quad \text{(starke Operator-Konvergenz).}$$

Weiterhin gilt $\sup_\alpha(a^* x_\alpha a) = a^*(\sup_\alpha x_\alpha)a$ für alle $a \in \mathcal{L}(H)$.

Beweis. Durch Betrachtung von $\{x_\alpha - x_{\alpha_0}\}_{\alpha \geq \alpha_0}$ darf o. E. $x_\alpha \geq 0$ für alle α angenommen werden. Nach Voraussetzung existiert $M > 0$, so dass $x_\alpha \leq M\mathbf{1}$ für alle α. Es folgt $\langle x_\alpha \xi, \xi \rangle \leq M\|\xi\|^2$ für alle α, so dass $\lim_\alpha \langle x_\alpha \xi, \xi \rangle$ wegen der Monotonie von $\{\langle x_\alpha \xi, \xi \rangle\}$ für alle $\xi \in H$ existiert. Durch Polarisation folgt, dass $\lim_\alpha \langle x_\alpha \xi, \eta \rangle$ für alle $\xi, \eta \in H$ existiert. Man sieht leicht ein, dass

$$(\xi, \eta) \mapsto \lim_\alpha \langle x_\alpha \xi, \eta \rangle$$

eine beschränkte Sesquilinearform definiert, und der zugehörige Operator sei $x \in \mathcal{L}(H)$. Wir haben dann $\langle x_\alpha \xi, \xi \rangle \nearrow \langle x\xi, \xi \rangle$ für alle $\xi \in H$ und man erkennt hieraus $x = \sup_\alpha x_\alpha$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|(x - x_\alpha)\xi\|^2 &= \|(x - x_\alpha)^{1/2}(x - x_\alpha)^{1/2}\xi\|^2 \\ &\leq \|x - x_\alpha\| \|(x - x_\alpha)^{1/2}\xi\|^2 \leq M\langle (x - x_\alpha)\xi, \xi \rangle \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

so dass $x_\alpha \xi \longrightarrow x\xi$ für alle $\xi \in H$.

Ist nun $a \in \mathcal{L}(H)$ gegeben, so gilt $\langle a^* x_\alpha a\xi, \xi \rangle = \langle x_\alpha a\xi, a\xi \rangle \nearrow \langle xa\xi, a\xi \rangle = \langle a^* xa\xi, \xi \rangle$ für alle $\xi \in H$, und daraus folgt $a^* xa = \sup_\alpha (a^* x_\alpha a)$. □

1.2. Von Neumanns Bikommutantensatz

Definition. *Sei $S \subseteq \mathcal{L}(H)$, dann ist der* Kommutant *von S definiert durch*

$$S' := \{y \in \mathcal{L}(H) \mid xy = yx \text{ für alle } x \in S\},$$

und der Bikommutant *von S durch $S'' := (S')'$.*

Bemerkung. (1) Es ist $S' \subseteq \mathcal{L}(H)$ stets eine schwach-Operator abgeschlossene Unteralgebra: Die algebraischen Abschlusseigenschaften sind sehr leicht zu sehen; ist ein Netz $\{y_\alpha\} \subseteq S'$ schwach-Operator-konvergent gegen $y \in \mathcal{L}(H)$, sowie $x \in S$, so gilt

$$\langle yx\xi, \eta \rangle = \lim_\alpha \langle y_\alpha x\xi, \eta \rangle = \lim_\alpha \langle xy_\alpha \xi, \eta \rangle = \lim_\alpha \langle y_\alpha \xi, x^*\eta \rangle = \langle y\xi, x^*\eta \rangle = \langle xy\xi, \eta \rangle$$

für alle $\xi, \eta \in H$, also $yx = xy$; somit ist $y \in S'$.

(2) Ist S bezüglich der Involution abgeschlossen, so gilt dies auch für S'. Ist S kommutativ, d. h. $xy = yx$ für alle $x, y \in S$, so gilt dies auch für S'.

(3) Man verifiziert leicht, dass für $S, T \subseteq \mathcal{L}(H)$ gilt

$$S \subseteq T \Rightarrow S' \supseteq T', \quad S \subseteq S'', \quad S' = (S')''.$$

(4) Es sei S bezüglich der Involution abgeschlossen, $e \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$ eine Projektion und $K := \operatorname{Bild} e$; dann ist $e \in S'$ genau dann, wenn K invariant unter allen $x \in S$ ist (d. h. $x(K) \subseteq K$ bzw. $xe = exe$). Dies folgt aus $ex = (x^*e)^* = (ex^*e)^* = exe = xe$ für $x \in S$.

Satz 1.2.1 (von Neumann)**.** *Eine stark-Operator-abgeschlossene *-Unteralgebra A von $\mathcal{L}(H)$ ist gleich ihrem Bikommutanten, d. h. $A = A''$.*

Beweis. Wir müssen lediglich zeigen, dass jedes $x \in A''$ im stark-Operator-Abschluss von A ist. Hierfür wollen wir bei gegebenen $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$ zeigen, dass

$$U(x) := \{y \in \mathcal{L}(H) \mid \|(y-x)\xi_i\| < 1 \text{ für alle } i\}$$

nicht-leeren Schnitt mit A besitzt.

Wir betrachten die n-fache Inflation

$$\varphi : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H^n), \quad y \mapsto y \oplus \cdots \oplus y,$$

wobei $(y \oplus \cdots \oplus y)(\xi_1, \ldots, \xi_n) := (y\xi_1, \ldots, y\xi_n)$; dies ist ein injektiver *-Homomorphismus. Es sei $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H^n$ und K der Normabschluss des Teilraums $\varphi(A)\xi \subseteq H^n$, dann ist K invariant unter $\varphi(y)$ für alle $y \in A$. Ist $p \in \mathcal{L}(H^n)$ die Projektion auf K, so folgt $p \in \varphi(A)'$ nach Bemerkung (4).

Wir zeigen $p\varphi(x) = \varphi(x)p$; ist (p_{jk}) die Matrixdarstellung (vgl. A.4) von p, so gilt $p_{jk} \in A'$ wegen $p \in \varphi(A)'$, und wegen $x \in A''$ folgt $p_{jk}x = xp_{jk}$ für alle j, k, also $p\varphi(x) = \varphi(x)p$. Damit gilt $\varphi(x)K \subseteq K$ und wegen $\xi = \varphi(\mathbf{1})\xi \in K$ ist speziell $\varphi(x)\xi \in K$. Deswegen existiert ein $y \in A$ mit $\|\varphi(y)\xi - \varphi(x)\xi\| < 1$, also ist $y \in U(x)$. □

Definition. *Eine *-Unteralgebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$, die eine der nachfolgenden äquivalenten Abschlussbedingungen erfüllt, heißt* von Neumann-Algebra*:*

- *(topologische Bedingung) $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen bezüglich starker (bzw. schwacher) Operator-Topologie,*
- *(algebraische Bedingung) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.*

Jede von Neumann-Algebra ist damit insbesondere eine C^*-Algebra.

Multiplikationsoperatoren

Wir kommen zu einem wichtigen Beispiel für eine kommutative von Neumann-Algebra, der Algebra der Multiplikationsoperatoren.

Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum. Für $g \in L_\infty(\mu)$ wird durch

$$m_g(f) := gf \quad (f \in L_2(\mu))$$

ein Operator $m_g \in \mathcal{L}(L_2(\mu))$ definiert mit $\|m_g\| \leq \|g\|_\infty$.

Proposition 1.2.2. *Ist $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein σ-endlicher, regulärer Maßraum, dann ist*

$$\mathcal{A} := \{m_g \mid g \in L_\infty(\mu)\} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mu))$$

eine kommutative von Neumann-Algebra mit $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

Beweis. Sicherlich ist $\mathcal{A}$ eine *-Algebra, so dass $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ zu zeigen bleibt.

$\supseteq$ Sei $m_g \in \mathcal{A}$, dann gilt $m_g m_h = m_{gh} = m_{hg} = m_h m_g$ für alle $m_h \in \mathcal{A}$, also $m_g \in \mathcal{A}'$; insbesondere ist also $\mathcal{A}$ kommutativ.

$\subseteq$ Sei $x \in \mathcal{L}(L_2(\mu))$ mit $xm_h = m_h x$ für alle $m_h \in \mathcal{A}$. Sei ferner $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ mit $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \ldots$ und $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle n. Dann ist $\chi_{\Omega_n} \in L_2(\mu)$ und wir setzen

$$g_n := x\chi_{\Omega_n} \in L_2(\mu).$$

Wir behaupten $g_n \in L_\infty(\mu)$ und $\|g_n\|_\infty \leq \|x\|$. Ansonsten existiert $\varepsilon > 0$ und $S \subseteq \Omega$ mit $0 < \mu(S) < \infty$, so dass $|g_n| \geq \|x\| + \varepsilon$ auf S. Dann ist $\chi_S \in L_2(\mu)$ und

$$\chi_S g_n = m_{\chi_S} x \chi_{\Omega_n} = x m_{\chi_S} \chi_{\Omega_n} = x\chi_{S\cap\Omega_n}, \tag{$*$}$$

also $\int_S |g_n|^2 d\mu = \|\chi_S g_n\|^2 = \|x\chi_{S\cap\Omega_n}\|^2 \leq \|x\|^2\mu(S)$, ein Widerspruch.

Für $m \leq n$ gilt (vgl. $(*)$) $\chi_{\Omega_m} g_n = x\chi_{\Omega_m\cap\Omega_n} = x\chi_{\Omega_m} = g_m$, damit definiert $g|_{\Omega_n} := g_n$ ein Element $g \in L_\infty(\mu)$ mit $\|g\|_\infty \leq \|x\|$.

Wir behaupten $m_g = x$. Sei $f \in L_2(\mu)$ mit Träger in Ω_n, dann gilt

$$m_g f = gf = g_n f = m_f g_n = m_f x \chi_{\Omega_n} = x m_f \chi_{\Omega_n} = xf.$$

Wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$ liegen solche f dicht in $L_2(\mu)$, so dass $x = m_g \in \mathcal{A}$. $\square$

1.3. Kaplanskys Dichtheitssatz

Es sei $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine *-Algebra und $x \in \mathcal{L}(H)$ im schwach- bzw. stark-Operator-Abschluss von A. Dann gibt es ein Netz $\{x_\alpha\} \subseteq A$, so dass $x_\alpha \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie. Dass wir das Netz $\{x_\alpha\}$ beschränkt (in Norm) wählen dürfen, ist dabei nicht klar; dies wird aus dem Dichtheitssatz von Kaplansky folgen. Wir beginnen mit einigen nützlichen Ergebnissen über starke Operator-Konvergenz.

Lemma 1.3.1. *Auf $S := \{x \in \mathcal{L}(H) \mid x \text{ normal}\}$ ist die Involution $x \mapsto x^*$ stark-Operator-stetig.*

Beweis. Es sei $x \in S$ und $\{x_\alpha\} \subseteq S$ ein Netz mit $x_\alpha \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|(x_\alpha - x)^*\xi\|^2 &= \langle x_\alpha^*\xi - x^*\xi, x_\alpha^*\xi - x^*\xi\rangle \\
&= \|x_\alpha\xi\|^2 - \|x\xi\|^2 + \langle xx^*\xi,\xi\rangle - \langle x_\alpha x^*\xi,\xi\rangle + \langle xx^*\xi,\xi\rangle - \langle xx_\alpha^*\xi,\xi\rangle \\
&= \|x_\alpha\xi\|^2 - \|x\xi\|^2 + \langle (x - x_\alpha)x^*\xi,\xi\rangle + \langle x(x^* - x_\alpha^*)\xi,\xi\rangle \\
&\leq \|x_\alpha\xi\|^2 - \|x\xi\|^2 + 2\|(x - x_\alpha)x^*\xi\|\|\xi\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

für alle $\xi \in H$, also $x_\alpha^* \longrightarrow x^*$ in starker Operator-Topologie. $\square$

Wir bezeichnen eine Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ als *stark-Operator-stetig*, falls für alle Hilberträume H und alle $x \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$ gilt: Ist $\{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$ ein Netz mit $x_\alpha \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie, so folgt $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ in starker Operator-Topologie (hierbei bezeichne $f \mapsto f(x)$ den stetigen Funktionenkalkül).

Proposition 1.3.2. *Jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ ist stark-Operator-stetig.*

Beweis. Es sei $\mathcal{F} \subseteq C(\mathbb{R})$ die Menge aller stark-Operator-stetigen Funktionen. Man sieht leicht, dass $\mathcal{F}$ ein abgeschlossener Teilraum von $C(\mathbb{R})$ ist, der die Inklusion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ enthält. Sind $f, g \in \mathcal{F}$ und g beschränkt, so folgt $fg \in \mathcal{F}$, wegen Bemerkung (2) nach Proposition 1.1.1. Außerdem ist $\overline{f} \in \mathcal{F}$ falls $f \in \mathcal{F}$, nach dem letzten Lemma.

Es sei $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F} \cap C_0(\mathbb{R})$. Wir benutzen den Satz von Stone-Weierstraß, um $\mathcal{F}_0 = C_0(\mathbb{R})$ zu zeigen. Aus dem ersten Absatz folgt, dass $\mathcal{F}_0$ eine abgeschlossene *-Unteralgebra von $C_0(\mathbb{R})$ ist. Wir definieren $g, h \in C_0(\mathbb{R})$ durch

$$g(\lambda) := \frac{1}{1+\lambda^2}, \quad h(\lambda) := \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Dann ist $\|g\|_\infty = \|h\|_\infty = 1$ und

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= (1+x^2)^{-1}(x(1+y^2) - (1+x^2)y)(1+y^2)^{-1} \\ &= (1+x^2)^{-1}(x-y)(1+y^2)^{-1} + (1+x^2)^{-1}(x(y-x)y)(1+y^2)^{-1} \end{aligned}$$

für $x, y \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$. Wegen $\|(1+x^2)^{-1}\| \leq 1$ und $\|(1+x^2)^{-1}x\| \leq 1$, folgt

$$\|h(x)\xi - h(y)\xi\| \leq \|(x-y)(1+y^2)^{-1}\xi\| + \|(y-x)y(1+y^2)^{-1}\xi\|$$

für alle $\xi \in H$, und aus dieser Ungleichung erkennt man $h \in \mathcal{F}_0$; damit ist auch $g = 1 - zh \in \mathcal{F}_0$. Es ist $\{g, h\}$ punktetrennend und $g(\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$; die Voraussetzung für den Satz von Stone-Weierstraß sind also erfüllt. □

Satz 1.3.3 (Kaplansky)**.** *Es sei $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine *-Algebra und $\mathcal{M}$ der stark-Operator-Abschluss von A. Dann gilt:*

(1) *B_A ist stark-Operator-dicht in $B_{\mathcal{M}}$,*

(2) *$B_{A_{\mathrm{sa}}}$ ist stark-Operator-dicht in $B_{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}}$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass A_{sa} stark-Operator-dicht in $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ ist. Sei $x \in \mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ und $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ein Netz mit $x_\alpha \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie, dann ist $\{\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\alpha^*)\} \subseteq A_{\mathrm{sa}}$ ein Netz mit $\frac{1}{2}(x_\alpha + x_\alpha^*) \longrightarrow x$ in schwacher Operator-Topologie. Es ist also x im schwach-Operator-Abschluss von A_{sa}, der nach Proposition 1.1.1, (2), gleich dem stark-Operator-Abschluss ist.

(2) Sei $x \in B_{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}}$, dann existiert nach dem ersten Absatz ein Netz $\{x_\alpha\} \subseteq A_{\mathrm{sa}}$ mit $x_\alpha \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie. Wir betrachten die Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$,

$$f(t) := \begin{cases} t & \text{falls } t \in [-1,1] \\ \frac{1}{t} & \text{sonst} \end{cases},$$

dann ist f nach der letzten Proposition stark-Operator-stetig, so dass $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x) = x$ in starker Operator-Topologie. Da f reellwertig ist und $\|f\|_\infty \leq 1$ erfüllt, ist $f(x_\alpha) \in B_{\overline{A}_{\mathrm{sa}}}$ für alle α, wobei $\overline{A}$ der Normabschluss von A sei. Dies zeigt, dass x im stark-Operator-Abschluss von $B_{A_{\mathrm{sa}}}$ ist.

(1) Die *-Algebra $M_2(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}(H^2)$ aller $\mathcal{M}$-wertigen 2×2-Matrizen ist stark-Operator-abgeschlossen und $M_2(A)$ ist stark-Operator-dicht in $M_2(\mathcal{M})$. Ist $x \in B_{\mathcal{M}}$ und

$$X := \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{M}),$$

so gilt $X \in M_2(\mathcal{M})_{\mathrm{sa}}$ und $\|X\| \leq 1$. Nach (2) existiert ein Netz $\{X_\alpha\} \subseteq B_{M_2(A)_{\mathrm{sa}}}$, so dass $X_\alpha \longrightarrow X$ in starker Operator-Topologie. Ist $(x_{\alpha,jk})_{jk}$ die Matrix von X_α, so ist $\{x_{\alpha,12}\} \subseteq B_A$ ein Netz mit $x_{\alpha,12} \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie. □

Korollar 1.3.4. *Eine *-Algebra $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist genau dann eine von Neumann-Algebra, wenn B_A stark-Operator-abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist A eine von Neumann-Algebra, so ist B_A stark-Operator-abgeschlossen. Es sei umgekehrt B_A stark-Operator-abgeschlossen und $\mathcal{M}$ der stark-Operator-Abschluss von A. Ist $x \in \mathcal{M}$, $x \neq 0$, so ist $x/\|x\| \in B_{\mathcal{M}}$, also ist nach Kaplanskys Dichtheitssatz $x/\|x\|$ im stark-Operator-Abschluss von B_A. Also ist $x/\|x\| \in B_A$ und somit $x \in A$. Es folgt, dass A stark-Operator-abgeschlossen, also eine von Neumann-Algebra ist. □

1.4. Der Verband der Projektionen

Proposition 1.4.1. *Innerhalb der partiell geordneten Menge $\mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$ der Projektionen existiert für jede Familie $\{e_\alpha\} \subseteq \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$ das Supremum bzw. das Infimum, welches wir mit $\bigvee_\alpha e_\alpha$ bzw. $\bigwedge_\alpha e_\alpha$ bezeichnen.*

Beweis. Wegen $e \leq f \Leftrightarrow \operatorname{Bild} e \subseteq \operatorname{Bild} f$ für $e, f \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$ sind die Projektionen auf $\overline{\operatorname{Spann}}(\bigcup_\alpha \operatorname{Bild} e_\alpha)$ bzw. auf $\bigcap_\alpha \operatorname{Bild} e_\alpha$ die gewünschten. □

Bemerkung. Es sei $e^\perp := \mathbf{1} - e$ für $e \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$. Für alle Familien $\{e_\alpha\} \subseteq \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$ haben wir

$$\bigvee_\alpha e_\alpha^\perp = (\bigwedge_\alpha e_\alpha)^\perp \quad \text{und} \quad \bigwedge_\alpha e_\alpha^\perp = (\bigvee_\alpha e_\alpha)^\perp.$$

Anmerkung. Das Supremum in $\mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$ von Projektionen muss nicht immer existieren. Hierfür sind $e, f \in M_2(\mathbb{C})_{\mathrm{proj}}$ ein Beispiel (ohne Beweis),

$$e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. (1) Existiert für eine Familie $\{e_\alpha\} \subseteq \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$ das Supremum $\sup_\alpha e_\alpha$ in $\mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$, und ist $\sup_\alpha e_\alpha \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$, so ist $\sup_\alpha e_\alpha = \bigvee_\alpha e_\alpha$.

(2) Ist $\{e_\alpha\}_\alpha \subseteq \mathcal{L}(H)_{\mathrm{proj}}$ ein Netz und $e = \lim_\alpha e_\alpha$ in starker Operator-Topologie, so ist $e \in \mathcal{M}_{proj}$. Denn e ist selbstadjungiert und es gilt $e = e^2$ wegen

$$\langle e\xi, \eta \rangle = \lim_\alpha \langle e_\alpha \xi, \eta \rangle = \lim_\alpha \langle e_\alpha \xi, e_\alpha \eta \rangle = \langle e\xi, e\eta \rangle = \langle e^2 \xi, \eta \rangle \quad (\xi, \eta \in H).$$

Proposition 1.4.2. *Es sei $\{e_\alpha\} \subseteq \mathcal{L}(H)$ ein Netz von Projektionen.*

(1) *Ist $\{e_\alpha\}$ monoton steigend, so gilt $\lim_\alpha e_\alpha = \bigvee_\alpha e_\alpha$,*

(2) *ist $\{e_\alpha\}$ monoton fallend, so gilt $\lim_\alpha e_\alpha = \bigwedge_\alpha e_\alpha$,*

wobei jeweils der stark-Operator-Grenzwert gemeint ist.

Beweis. (1) Nach Satz 1.1.2 gilt $\lim_\alpha e_\alpha = \sup_\alpha e_\alpha$, und nach der letzten Bemerkung (2), (1) folgt $\sup_\alpha e_\alpha = \bigvee_\alpha e_\alpha$.

(2) Mit (1) erhalten wir $\lim_\alpha e_\alpha = \mathbf{1} - \lim_\alpha e_\alpha^\perp = \mathbf{1} - \bigvee_\alpha e_\alpha^\perp = \bigwedge_\alpha e_\alpha$. □

Aus Proposition 1.4.2 folgt bereits, dass das Supremum $\bigvee_\alpha e_\alpha$ eines monoton steigenden Netzes $\{e_\alpha\}_\alpha \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ in $\mathcal{M}$ ist. Diese Aussage werden für allgemeine Familien $\{e_i\}_{i\in I}$ verallgemeinern, jedoch benötigen wir zunächst zwei Lemmata.

Zu $x \in \mathcal{L}(H)$ sei $\overline{\mathrm{Bild}} x := \overline{\mathrm{Bild}\, x}$.

Lemma 1.4.3. *Es sei $x \in \mathcal{L}(H)$ und $0 \leq x \leq \mathbf{1}$. Dann ist $(x^{1/n})_n$ eine aufsteigende Folge, die in starker Operator-Topologie gegen die Projektion auf $\overline{\mathrm{Bild}} x$ konvergiert.*

Beweis. Durch Betrachtung des stetigen Funktionenkalküls erkennen wir, dass $0 \leq x^{1/n} \leq \mathbf{1}$ für alle n, und dass $x^{1/n}$ monoton steigend ist. Nach Satz 1.1.2 konvergiert daher $(x^{1/n})_n$ in starker Operator-Topologie gegen $e := \sup_n x^{1/n} \in \mathcal{L}(H)_{\mathrm{sa}}$.

Es ist e eine Projektion, denn $x^{1/2n} \longrightarrow e$ und somit $x^{1/n} = (x^{1/2n})^2 \longrightarrow e^2$, jeweils in starker Operator-Topologie, d. h. $e = e^2$. Es bleibt nun $\mathrm{Kern}\, e = \mathrm{Kern}\, x$ zu zeigen, denn dann folgt $\mathrm{Bild}\, e = (\mathrm{Kern}\, e)^\perp = (\mathrm{Kern}\, x)^\perp = \overline{\mathrm{Bild}} x$, wie gewünscht.

Ist nun $e\xi = 0$ ($\xi \in H$), dann ist $\langle e\xi, \xi\rangle = 0$ und wegen $x \leq e$ auch $\|x^{1/2}\xi\|^2 = \langle x\xi, \xi\rangle = 0$, und somit $x\xi = x^{1/2}x^{1/2}\xi = 0$. Sei umgekehrt $x\xi = 0$ ($\xi \in H$) und $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz existiert eine Folge von Polynomen p_k, so dass $p_k(t)t \longrightarrow [t \mapsto t^{1/n}]$ gleichmäßig auf $[0,1]$ gilt. Somit folgt $p_k(x)x \longrightarrow x^{1/n}$ und $x^{1/n}\xi = \lim_n p_k(x)x\xi = 0$, so dass $e\xi = \lim_n x^{1/n}\xi = 0$. □

Lemma 1.4.4. *Es seien $e, f \in \mathcal{L}(H)$ zwei Projektionen. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(e \vee f) = \overline{\mathrm{Bild}}(e + f).$$

Beweis. Es ist $\langle (e+f)\xi, \xi\rangle = \langle e\xi, \xi\rangle + \langle f\xi, \xi\rangle = \|e\xi\|^2 + \|f\xi\|^2$ für $\xi \in H$ und daher

$$\mathrm{Kern}(e+f) = \mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f.$$

Nun ist $\mathrm{Kern}\, e \cap \mathrm{Kern}\, f = \mathrm{Bild}((\mathbf{1} - e) \wedge (\mathbf{1} - f)) = \mathrm{Bild}(\mathbf{1} - e \vee f)$, so das insgesamt folgt $\overline{\mathrm{Bild}}(e+f) = \mathrm{Kern}(e+f)^\perp = \mathrm{Bild}(\mathbf{1} - e \vee f)^\perp = \mathrm{Bild}(e \vee f)$. □

Satz 1.4.5. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra.*

(1) *Für alle $x \in \mathcal{M}$ sind die Projektionen auf $\mathrm{Kern}\, x$ und auf $\overline{\mathrm{Bild}} x$ in $\mathcal{M}$.*

(2) *Für eine Familie $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ sind $\bigvee_i e_i \in \mathcal{M}$ und $\bigwedge_i e_i \in \mathcal{M}$.*

Beweis. (1) Nehmen wir o.E. $\|x\| \leq 1$ an, so ist $0 \leq |x| \leq \mathbf{1}$ und nach Lemma 1.4.3 ist die Projektion auf $\overline{\text{Bild}}|x|$ in $\mathcal{M}$, denn $|x|^{1/n} \in \mathcal{M}$ für alle n. Wegen $\overline{\text{Bild}}|x| = (\text{Kern}\,|x|)^\perp = (\text{Kern}\,x)^\perp = \overline{\text{Bild}}x^*$ folgt (1).

(2) Für zwei Projektionen $e, f \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ ist nach Lemma 1.4.4 $\text{Bild}(e \vee f) = \overline{\text{Bild}}(e+f)$, also $e \vee f \in \mathcal{M}$ nach (1). Es folgt durch Induktion, dass $e_J := \bigvee_{j \in J} e_j \in \mathcal{M}$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt. Nun ist $\{e_J\}_J \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ ein aufsteigendes Netz, und daher gilt nach Proposition 1.4.2 $\bigvee_i e_i = \bigvee_J e_J = \lim_J e_J \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$. Hiermit folgt auch $\bigwedge_i e_i = (\bigvee_i e_i^\perp)^\perp \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$. □

1.5. Spektralzerlegung

Im Rahmen der von Neumann-Algebren kann die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren recht elegant entwickelt werden. Fundamental ist dabei der folgende Satz.

Es sei zunächst daran erinnert, dass jede kommutative C^*-Algebra via der Gelfand-Transformation *-isomorph zu $C(X)$ ist, wobei X, die Menge der komplexen Homomorphismen, ausgestattet mit der Gelfand-Topologie, ein kompakter Hausdorffraum ist.

Satz 1.5.1. *Ist $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra, so ist der Raum X der komplexen Homomorphismen extrem unzusammenhängend, d. h. jede offene Menge in X hat offenen Abschluss.*

Beweis. Es sei $U \subseteq X$ offen und $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ die Menge aller Funktionen $0 \leq f \leq 1$ mit $f|_{X \setminus U} \equiv 0$. Ferner sei $A \subseteq \text{Pot}(\mathcal{F})$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathcal{F}$, und für $\alpha \in A$ setze $g_\alpha := \max_{f \in \alpha} f$. Dann ist $\{g_\alpha\}_\alpha$ ein monoton steigendes, beschränktes Netz positiver Funktionen, und das Gleiche gilt für das Netz $\{x_\alpha\}_\alpha$ der entsprechenden Operatoren $x_\alpha := \varphi^{-1}(f_\alpha)$, wobei $\varphi : \mathcal{M} \to C(X)$ die Gelfand-Transformation bezeichne.

Nach Satz 1.1.2 existiert $x := \sup_\alpha x_\alpha \in \mathcal{M}$ und somit ist $g := \varphi(x) = \sup_\alpha g_\alpha$; es ist $g \in C(X)$ und sicherlich ist $g \leq 1$. Da für alle $p \in U$ ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(p) = 1$ existiert (Lemma von Urysohn, siehe [MeV92], 4.17), folgt $g|_U \equiv 1$ und somit $g|_{\overline{U}} \equiv 1$. Ist $p \notin X \setminus \overline{U}$, so existiert nach dem Lemma von Urysohn $h \in C(X)$, $h \geq 0$ mit $h|_{\overline{U}} \equiv 1$ und $h(p) = 0$, also $h \geq \sup_\alpha g_\alpha = g$; damit ist $g|_{X \setminus \overline{U}} \equiv 0$. Wegen $g \in C(X)$ ist folglich $\overline{U}$ offen. □

Definition. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra. Eine* Spektralschar *ist eine Familie $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$, so dass*

- *$e_\lambda \leq e_\mu$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \leq \mu$ (Monotonie),*
- *$e_\lambda = \bigwedge_{\mu > \lambda} e_\mu$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (rechtsseitige Stetigkeit),*
- *$\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = 0$ und $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = \mathbf{1}$.*

Die Spektralschar heißt beschränkt*, falls $M > 0$ mit $e_{-M} = 0$ und $e_M = \mathbf{1}$ existiert.*

Satz 1.5.2. *Es sei $x \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\mathcal{M} := \{x\}''$ die von x generierte von Neumann-Algebra. Dann gibt es eine beschränkte Spektralschar $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$, so dass*

$$x = \int_{-M}^{M} \lambda de_\lambda \quad \textit{für alle } M > \|x\|$$

im Sinne von Normkonvergenz approximierender Riemann-Summen.

Beweis. Es ist $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra, und bezeichnet $\varphi : \mathcal{M} \to C(X)$ die Gelfand-Transformation, so ist X nach dem letzten Satz ein extrem unzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum.

Es ist $h := \varphi(x) \in C(X)$ reellwertig. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachte die Menge

$$X_\lambda := \{h \leq \lambda\}^0 \subseteq X.$$

Wegen $X_\lambda = X \setminus \overline{\{h > \lambda\}}$ ist X_λ offen und abgeschlossen, also $\chi_{X_\lambda} \in C(X)$.

Wir definieren $e_\lambda := \varphi^{-1}(\chi_{X_\lambda}) \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ und zeigen, dass $\{e_\lambda\}$ eine beschränkte Spektralschar ist. Für $\lambda \leq \mu$ ist zunächst $X_\lambda \subseteq X_\mu$, also $e_\lambda \leq e_\mu$. Mit $M > \|x\| = \|h\|_\infty$ gilt weiterhin $X_M = X$ und $X_{-M} = 0$, also $e_M = \mathbf{1}$ und $e_{-M} = 0$.

Wir zeigen nun $e_\lambda = \bigwedge_{\mu>\lambda} e_\mu$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Sicherlich ist $f := \bigwedge_{\mu>\lambda} e_\mu \geq e_\lambda$. Mit $\chi_Y := \varphi(f)$ gilt nun $Y \subseteq \bigcap_{\mu>\lambda} X_\mu \subseteq \bigcap_{\mu>\lambda}\{h \leq \mu\} = \{h \leq \lambda\}$, und folglich $Y = Y^0 \subseteq \{h \leq \lambda\}^0 = X_\lambda$. Also gilt $f \leq e_\lambda$ und somit $f = e_\lambda$.

Es sei nun $M > \|x\|$ und $-M = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k = M$ eine Zerlegung der Feinheit $\delta > 0$, sowie $\alpha_j \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ beliebig gewählt. Betrachten wir

$$g := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{X_{\lambda_j} \setminus X_{\lambda_{j-1}}} \in C(X),$$

so gilt $\|g - h\|_\infty \leq \delta$; denn für jedes $p \in X$ gilt $p \in X_{\lambda_j} \setminus X_{\lambda_{j-1}}$ für ein j, also $g(p) = \alpha_j$ und $h(p) \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$, und somit $|g(p) - h(p)| \leq \delta$.

Es folgt $\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(e_{\lambda_j} - e_{\lambda_{j-1}}) - x\| = \|\varphi^{-1}(g) - \varphi^{-1}(h)\| \leq \delta$, also $\int_{-M}^{M} \lambda de_\lambda = x$. □

Bemerkung. Aus dem obigen Satz folgt, dass jede von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ der Normabschluss vom Spann ihrer Projektionen ist (betrachte zu $x \in \mathcal{M}$ die selbstadjungierten Operatoren $\operatorname{Re} x := \frac{1}{2}(x + x^*)$ und $\operatorname{Im} x := \frac{1}{2i}(x - x^*)$ mit $x = \operatorname{Re} x + i \operatorname{Im} x$.

Lemma 1.5.3. *Es sei $x \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\mathcal{M} := \{x\}''$. Dann ist x der Grenzwert in Norm von Linearkombinationen orthogonaler Projektionen in $\mathcal{M}$ mit Koeffizienten in* $\operatorname{Sp} x$.

Beweis. Wir führen den Beweis von Satz 1.5.2 und konstruieren zur Zerlegung $-M = \lambda_0 < \ldots \lambda_k = M$ der Feinheit $\frac{1}{n} > 0$ wieder eine Funktion $g := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{X_{\lambda_j} \setminus X_{\lambda_{j-1}}}$, wobei hier allerdings $\alpha_j \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j] \cap \operatorname{Sp} x$ gewählt sei, falls dies möglich ist. Ist $[\lambda_{j-1}, \lambda_j] \cap \operatorname{Sp} x = \emptyset$, so ist $\{\lambda_{j-1} \leq h \leq \lambda_j\} = \emptyset$ (wegen $\operatorname{Bild} h = \operatorname{Sp} x$), und damit $e_\lambda - e_{\lambda_{j-1}} = 0$. Somit ist $y_n := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(e_{\lambda_j} - e_{\lambda_{j-1}})$ eine Linearkombination der gewünschten Art und wie vorher gilt $\|y_n - x\| = \|\varphi^{-1}(g) - \varphi^{-1}(h)\| \leq \delta$. □

1.6. Der Borel'sche Funktionenkalkül

In diesem Abschnitt weiten wir den stetigen Funktionenkalkül $g \mapsto g(x)$ auf die Menge der messbaren, beschränkten Funktionen g aus. Für Eindeutigkeitsaussagen erweist sich der folgende Begriff als nützlich.

Definition. *Es seien A und B teilweise geordnete Mengen. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt* σ-normal, *falls $\varphi(\sup_n a_n) = \sup_n \varphi(a_n)$ für alle monoton steigenden Folgen $(a_n) \subseteq A$ mit $\sup_n a_n \in A$.*

Bemerkung. Die Komposition zweier σ-normaler Abbildungen ist wieder σ-normal. Eine bijektive Abbildung $\varphi : A \to B$, für die φ und φ^{-1} ordnungserhaltend ist, ist σ-normal.

Erinnerung. Es sei X ein kompakter Hausdorffraum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *nirgends dicht*, falls $(\overline{A})^0 = \emptyset$, und $A \subseteq X$ heißt *mager*, falls eine Folge (A_n) nirgends dichter Mengen in X existiert, so dass $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Der Satz von Baire besagt, für eine magere Menge $A \subseteq X$ ist $X \setminus A$ dicht in X, d. h. $A^0 = \emptyset$; insbesondere ist eine magere und abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ nirgends dicht.

Lemma 1.6.1. *Es sei X ein extrem unzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum und wir betrachten die Borel'sche σ-Algebra auf X.*

(1) *Für jede messbare Menge $S \subseteq X$ existiert eine offene und abgeschlossene Menge $Y \subseteq X$, so dass $S \triangle Y := (S \setminus Y) \cup (Y \setminus S)$ mager ist.*

(2) *Für $g \in \mathcal{B}_\infty(X)$ existiert genau eine Funktion $f \in C(X)$, so dass $g = f$ außerhalb einer mageren Menge gilt.*

(3) *Die durch (2) definierte Abbildung $\alpha : \mathcal{B}_\infty(X) \to C(X)$, $g \mapsto f$ ist ein σ-normaler *-Homomorphismus.*

Beweis. (1) Es bezeichne $\mathcal{F}$ die Menge aller messbaren Mengen $S \subseteq X$ für die ein offenes und abgeschlossenes $Y \subseteq X$ existiert mit $S \triangle Y$ mager. Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra ist, die die offenen Mengen enthält; dann ist die Behauptung gezeigt, da $\mathcal{F}$ dann alle messbaren (Borel-)Mengen enthält.

Ist $S \in \mathcal{F}$ und $Y \subseteq X$ offen und abgeschlossen mit $S \triangle Y$ mager, so ist $X \setminus Y$ offen und abgeschlossen und $(X \setminus S) \triangle (X \setminus Y) = S \triangle Y$ ist mager, also ist $X \setminus S \in \mathcal{F}$.

Ist $S \subseteq X$ offen, dann ist $Y := \overline{S}$ offen und abgeschlossen, also $S \triangle Y = \overline{S} \setminus S$ nirgends dicht und somit $S \in \mathcal{F}$.

Ist $(S_n) \subseteq \mathcal{F}$ und $Y_n \subseteq X$ offen und abgeschlossen mit $S_n \triangle Y_n$ mager ($n \in \mathbb{N}$), so ist

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \triangle (\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \triangle Y_n),$$

also mager. Da $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ als eine offene Menge in $\mathcal{F}$ liegt, folgt $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \in \mathcal{F}$, wie gewünscht.

(2) Zunächst sei $g = \chi_S$, wobei $S \subseteq X$ eine messbare Menge sei. Nach (1) existiert $Y \subseteq X$ offen und abgeschlossen mit $S \triangle Y$ mager, also ist $f := \chi_Y \in C(X)$ und $f = g$ außer auf der mageren Menge $S \triangle Y$. Es folgt die Behauptung somit auch für alle Treppenfunktionen $g = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{S_i}$ (mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ und $S_i \subseteq X$ messbare Mengen).

Sei nun $g \in \mathcal{B}_\infty(X)$ gegeben, dann existiert eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen mit $\|g_n - g\|_\infty \longrightarrow 0$. Zu g_n existieren $f_n \in C(X)$, so dass $f_n = g_n$ außerhalb von mageren Mengen Z_n ($n \in \mathbb{N}$). Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist dann $|f_n - f_m| \leq |g_n - g_m|$ auf einer dichten Teilmenge von X (Satz von Baire), so dass $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|g_n - g_m\|_\infty$. Damit ist (f_n) eine Cauchy-Folge und besitzt einen Grenzwert $f \in C(X)$. Es ist $f = g$ außerhalb der mageren Menge $\bigcup_{n=1}^\infty Z_n$, wie gewünscht.

Für den Beweis der Eindeutigkeit, seien $f_1, f_2 \in C(X)$, so dass $g = f_1$ und $g = f_2$ außerhalb von mageren Mengen, dann ist $f_1 = f_2$ außerhalb einer mageren Menge, und damit $f_1 = f_2$ auf einer dichten Teilmenge, so dass $f_1 = f_2$ folgt.

(3) Seien $g_1, g_2 \in \mathcal{B}_\infty(X)$ und $f_1, f_2 \in C(X)$, so dass $g_1 = f_1$ und $g_2 = f_2$ außerhalb von mageren Mengen, dann ist $g_1 + g_2 = f_1 + f_2$ außerhalb einer mageren Menge, und somit $\alpha(g_1 + g_2) = \alpha(g_1) + \alpha(g_2)$; die anderen Eigenschaften eines *-Homomorphismus zeigt man genau so.

Zum Beweis der σ-Normalität sei nun (g_n) eine Folge reeller Funktionen in $\mathcal{B}_\infty(X)$ mit $g_n \nearrow g$, wobei $g \in \mathcal{B}_\infty(X)$; mit $f_n := \alpha(g_n) \in C(X)$ und $f := \alpha(g) \in C(X)$ ist $f = \sup_n f_n$ zu zeigen. Es ist $f_n \leq f$ für alle n, also $\sup_n f_n \leq f$. Sei nun $h \in C(X)$ und $h \geq f_n$ für alle n; da $(g_n(p)) = (f_n(p))$ für alle p außerhalb einer mageren Menge, folgt $h \geq g$ und damit $h \geq f$, jeweils außerhalb einer mageren Menge. Da h und f stetig sind, folgt $h \geq f$ und damit $f = \sup_n f_n$. $\square$

Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra, $\varphi : \mathcal{M} \to C(X)$ die Gelfand-Transformation, und $x \in \mathcal{M}$. Die folgende Verkettung von Abbildungen

$$\begin{gathered} \mathcal{B}_\infty(\operatorname{Sp} x) \to \mathcal{B}_\infty(X) \xrightarrow{\alpha} C(X) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathcal{M} \\ g \mapsto g \circ \varphi(x) =: \widetilde{g} \mapsto f \mapsto \varphi^{-1}(f) =: g(x), \end{gathered}$$

wobei α die Abbildung aus Lemma 2.6.1 ist, liefert einen σ-normalen *-Homomorphismus $\mathcal{B}_\infty(\operatorname{Sp} x) \to \mathcal{M}$, den wir durch Vorschalten der Abbildung $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\operatorname{Sp} x)$, $g \mapsto g|_{\operatorname{Sp} x}$ auch als σ-normalen *-Homomorphismus $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ betrachten können.

Satz 1.6.2 (Borel'scher Funktionenkalkül)**.**
Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $x \in \mathcal{M}$. Dann gibt es genau einen σ-normalen *-Homomorphismus

$$\mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}) \to M, g \mapsto g(x) \text{ mit } z \mapsto x,$$

wobei z die Identitätsabbildung auf $\mathbb{C}$ sei.

Beweis. Existenz. Die Abbildungen $g \mapsto \widetilde{g}$, α und φ^{-1} sind allesamt σ-normale *-Homomorphismen, und somit ist auch deren Verkettung $g \mapsto g(x)$ ein σ-normaler *-Homomorphismus. Ferner ist $\alpha(\widetilde{z}) = \varphi(x)$, also $z \mapsto x$.

Eindeutigkeit. Es sei $\psi : \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ ein σ-normaler *-Homomorphismus mit $\psi(z) = x$. Sei $D := \overline{B}(0, 2\|x\|)$, dann gilt $0 \leq (2\|x\|)^n \chi_{\mathbb{C}\setminus D} \leq |z|^n$, also $0 \leq (2\|x\|^n)\psi(\chi_{\mathbb{C}\setminus D}) \leq |x|^n \leq \|x\|^n$ für alle n und damit $\psi(\chi_{\mathbb{C}\setminus D}) = 0$. Die Abbildung

$$\psi_0 : \mathcal{B}_\infty(D) \to \mathcal{M},\ \psi_0(g|_D) := \psi(g)(= \psi(g\chi_D)) \quad (g \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}))$$

ist daher wohldefiniert und ein σ-normaler *-Homomorphismus. Wegen $\psi_0(z) = x$ folgt $\psi_0(p) = p(x)$ für alle Polynome p in z und $\overline{z}$. Da diese nach dem Approximationssatz von Weierstraß dicht in $C(D)$ liegen, folgt $\psi_0(g) = g(x)$ für alle $g \in C(D)$.

Sei nun $O \subseteq D$ offen, dann existiert eine Folge $(g_n) \subseteq C(D)$, so dass $0 \leq g_n \nearrow \chi_O$: Denn sei $K_n := D \setminus \bigcup_{\lambda \in D\setminus O} B(\lambda, \frac{1}{n})$, so ist $K_n \subseteq O$ kompakt und $O = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$. Nach dem Lemma von Uryson existieren $h_n \in C(D)$ mit $h_n \equiv 1$ auf K_n und $h_n \equiv 0$ außerhalb O; die Folge (g_n) mit $g_n := \max_{1 \leq k \leq n} h_k$ leistet dann das Gewünschte.

Aufgrund der σ-Normalität folgt nun $\psi_0(\chi_O) = \sup_n \psi_0(g_n) = \sup_n g_n(x) = \chi_O(x)$. Definieren wir

$$\mathcal{S} := \{S \subseteq D \text{ messbare Menge} \mid \psi_0(\chi_S) = \chi_S(x)\},$$

so haben wir gezeigt, dass $\mathcal{S}$ die offenen Mengen $O \subseteq D$ enthält. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra ist, die dann alle messbare Mengen enthält.

Ist $S \in \mathcal{S}$, so gilt $\psi_0(\chi_{D\setminus S}) = \mathbf{1} - \psi_0(\chi_S) = \mathbf{1} - \chi_S(x) = \chi_{D\setminus S}(x)$, so dass $D \setminus S \in \mathcal{S}$. Sind $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, so ist wegen $\chi_{S_1 \cap S_2} = \chi_{S_1}\chi_{S_2}$ auch $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$. Es folgt, dass $\mathcal{S}$ auch unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen ist. Sei $(S_n) \subseteq \mathcal{S}$ und $S := \bigcup_{n=1}^\infty S_n$, dann ist $\psi_0(\chi_S) = \sup_n \psi_0(\chi_{S_1 \cup \cdots \cup S_n}) = \sup_n \chi_{S_1 \cup \cdots \cup S_n}(x) = \chi_S(x)$, und somit $S \in \mathcal{S}$.

Wir haben nun gezeigt, dass

$$\psi_0(g) = g(x) \tag{$*$}$$

für charakteristische Funktionen $g = \chi_S$ gilt; es folgt die Gültigkeit von $(*)$ auch für Treppenfunktionen, und da diese normdicht in $\mathcal{B}_\infty(D)$ sind, gilt $(*)$ für alle $g \in \mathcal{B}_\infty(D)$. Es folgt somit $\psi(g) = \psi_0(g|_D) = g(x)$ für alle $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. ☐

Proposition 1.6.3. *Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $x \in \mathcal{M}$. Dann gilt*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ für alle } f, g \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}).$$

Beweis. Die Abbildung $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C})$, $f \mapsto f \circ g$ ist ein σ-normaler *-Homomorphismus, damit ist $\psi : \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$, $f \mapsto (f \circ g)(x)$ ein σ-normaler *-Homomorphismus mit $\psi(z) = g(x)$. Wegen der Eindeutigkeit des Borel'schen Funktionenkalküls folgt daher $(f \circ g)(x) = \psi(f) = f(g(x))$. ☐

1.7. Die Präduale

Wir werden zeigen, dass eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ Dualraum eines Banachraums, der Prädualen, ist. Zunächst diskutieren wir die Präduale von $\mathcal{L}(H)$ und führen eine neue lokalkonvexe Topologie ein.

Erinnerung. (1) Es sei H ein Hilbertraum und $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von H. Die *Spurklasse* $\mathcal{L}_1(H)$ besteht aus allen Operatoren $x \in \mathcal{L}(H)$ mit

$$\|x\|_1 := \sum_{i\in I} \langle |x|\varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle < \infty.$$

Es ist $\|x\|_1$ unabhängig von der Orthonormalbasis, und $\mathcal{L}_1(H)$ ist mit der Norm $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum.

(2) Die Abbildung

$$\operatorname{tr} : \mathcal{L}_1(H) \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{i\in I} \langle x\varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle$$

ist ein stetiges Funktional auf $\mathcal{L}_1(H)$ mit $\|\operatorname{tr}\| = 1$, und es gilt $\operatorname{tr}(xy) = \operatorname{tr}(yx)$ für alle $x \in \mathcal{L}_1(H)$ und $y \in \mathcal{L}(H)$.

(3) Es ist

$$\mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}_1(H)^*, \quad y \mapsto [x \mapsto \operatorname{tr}(yx)]$$

ein isometrischer Isomorphismus, d. h. wir können $\mathcal{L}(H)$ als Dualraum von $\mathcal{L}_1(H)$ auffassen.

Ausführungen hierzu findet man in [Mur90], S. 63f, 125f. Siehe auch [Wer02], Abschnitte VI.5 und VI.6.

Definition. *Die schwach***-Topologie* $\sigma(\mathcal{L}(H), \mathcal{L}_1(H))$ *auf* $\mathcal{L}(H)$ *als Dualraum von* $\mathcal{L}_1(H)$ *wird als* σ-schwache Topologie *bezeichnet.*

Bemerkung. (1) Die schwache Operator-Topologie kann man als $\sigma(\mathcal{L}(H), \mathcal{F}(H))$-Topologie identifizieren (hierbei sind $\mathcal{F}(H)$ die Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild). Wegen $\mathcal{F}(H) \subseteq \mathcal{L}_1(H)$ folgt, dass die schwache Operator-Topologie schwächer als die σ-schwache Topologie ist.

(2) Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ([Wer02], VIII.3.11) ist die abgeschlossene Einheitskugel $B_{\mathcal{L}(H)}$ σ-schwach-kompakt, und somit kompakt in schwacher Operator-Topologie.

(3) Auf $B_{\mathcal{L}(H)}$ stimmen σ-schwach- und schwache Operator-Topologie überein.
Denn die Identität von $B_{\mathcal{L}(H)}$ in σ-schwacher Topologie nach $B_{\mathcal{L}(H)}$ in schwacher Operator-Topologie ist eine bijektive stetige Abbildung von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum und somit ein Homöomorphismus (siehe [MeV92], 4.2).

Proposition 1.7.1. *Eine *-Algebra $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist genau dann eine von Neumann-Algebra, wenn A σ-schwach-abgeschlossen ist.*

Beweis. Nach Bemerkung (1) ist eine von Neumann-Algebra σ-schwach-abgeschlossen. Ist umgekehrt A σ-schwach-abgeschlossen, so ist die Einheitskugel B_A σ-schwach-abgeschlossen und nach Bemerkung (3) somit schwach-Operator-abgeschlossen. Nach Korollar 1.3.4 ist dann A eine von Neumann-Algebra. □

Satz 1.7.2. *Jede von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ ist Dualraum eines Banachraums $\mathcal{M}_*$, der* Prädualen.

Beweis. Da $\mathcal{M}$ σ-schwach abgeschlossen ist, folgt nach dem Bipolarsatz ([Wer02], Satz VIII.3.9)

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{00} = (M^0)^0 \cong (\mathcal{L}_1(H)/M^0)^*,$$

so dass wir $\mathcal{M}_* := \mathcal{L}_1(H)/M^0$ setzen können; hierbei haben wir die Isomorphie $F^0 \cong (E/F)^*$ für einen abgeschlossenen Teilraum F eines normierten Raums E (siehe [MeV92], 6.14) benutzt. □

Bemerkung. (1) Man verifiziert leicht, dass die auf $\mathcal{M}$ induzierte σ-schwache Topologie von $\mathcal{L}(H)$ gerade die schwach*-Topologie $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$ ist.

(2) Man kann zeigen, dass eine C^*-Algebra genau dann *-isomorph zu einer von Neumann-Algebra ist, wenn sie eine Präduale besitzt ([Sak71], 1.16.7). Diese Charakterisierung ermöglicht es, die Theorie der von Neumann-Algebren ohne eine spezielle Darstellung der Elemente als Operatoren in $\mathcal{L}(H)$ zu entwickeln.

Erinnerung. Ist E ein Banachraum, so ist ein lineares Funktional φ auf E^* genau dann schwach*-stetig, falls φ schwach*-stetig auf der Einheitskugel B_{E^*} ist.

Denn ist φ auf B_{E^*} schwach*-stetig, so ist $\operatorname{Kern} \varphi \cap B_{E^*}$ schwach*-abgeschlossen. Nach dem Satz von Banach-Dieudonné ([Wer02], VIII.3.16) folgt, dass $\operatorname{Kern} \varphi$ schwach*-abgeschlossen ist. Deswegen (siehe etwa [Mur90], A.3) ist φ schwach*-stetig.

Lemma 1.7.3. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Ein lineares Funktional φ ist genau dann σ-schwach-stetig, wenn φ schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ ist.*

Beweis. Nach der obigen Erinnerung ist φ genau dann σ-schwach-stetig, wenn φ σ-schwach-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ ist. Da auf $B_{\mathcal{M}}$ σ-schwach-Topologie und schwache Operator-Topologie übereinstimmen, folgt das Lemma. □

1.8. Normale Zustände

Die positiven Funktionale bzw. Zustände, die σ-schwach-stetig sind, werden eine bedeutende Rolle spielen. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass diese Funktionale gerade die normalen Funktionale im Sinne der folgenden Definition sind.

Definition. *Ein positives Funktional φ auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ heißt* normal*, falls für jedes monoton steigende, nach oben beschränkte Netz $\{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{M}_{\text{sa}}$ gilt*

$$\varphi(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(x_\alpha).$$

Definition. *Der* Träger $\operatorname{supp}\varphi$ *eines positiven, normalen Funktionals φ auf $\mathcal{M}$ sei definiert durch*

$$(\operatorname{supp}\varphi)^\perp := \bigvee\{e \in \mathcal{M}_{\text{proj}} \mid \varphi(e) = 0\}.$$

Lemma 1.8.1. *Es sei φ ein normales, positives Funktional auf $\mathcal{M}$, $p := \operatorname{supp}\varphi$.*

(1) *Es ist $\varphi(p^\perp) = 0$.*

(2) *Ist $x \in \mathcal{M}_+$ und $\varphi(x) = 0$, so folgt $pxp = 0$.*

Beweis. (1) Wir zeigen zuerst

$$\varphi(x) = 0 \iff \varphi(e_R(x)) = 0 \quad (x \in \mathcal{M}_+),$$

wobei $e_R(x)$ die Projektion auf $\overline{\text{Bild}}x$ bezeichne.

Aus $\varphi(e_R(x)) = 0$ folgt nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $0 \le \varphi(x) = \varphi(e_R(x)x) \le \varphi(e_R(x))^{1/2}\varphi(x^2)^{1/2} = 0$ und damit $\varphi(x) = 0$.

Ist umgekehrt $\varphi(x) = 0$, so ist $0 \le \varphi(x^n) = \varphi(x^{1/2}x^{n-1/2}) \le \varphi(x)^{1/2}\varphi(x^{2n-1})^{1/2} = 0$ und somit $\varphi(x^n) = 0$ für alle $n \ge 1$. Hieraus folgt $\varphi(f(x)) = 0$ für jede stetige Funktion $f : \operatorname{Sp} x \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, weil sich f gleichmäßig durch Polynome ohne konstantem Term approximieren lässt. Insbesondere ist $\varphi(x^{1/n}) = 0$ für alle n. Nach Lemma 1.4.3 (o. E. dürfen wir $\|x\| \le 1$ annehmen) und Satz 1.1.2 ist $(x^{1/n})_n$ eine monoton steigende Folge mit $\sup_n x^{1/n} = e_R(x)$. Wegen der Normalität von φ folgt also $\varphi(e_R(x)) = 0$.

Sind nun $e, f \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ mit $\varphi(e) = \varphi(f) = 0$ gegeben, so folgt nach Lemma 1.4.4

$$\varphi(e \vee f) = \varphi(e_R(e + f)) = \varphi(e + f) = 0.$$

Daher bildet die Familie $\{e\}$ aller $e \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ mit $\varphi(e) = 0$ ein monoton steigendes Netz mit Supremum $p^\perp$. Aufgrund der Normalität von φ gilt daher $\varphi(p^\perp) = 0$.

(2) Ist $\varphi(x) = 0$, so folgt $\varphi(xp) = \varphi(px) = 0$ mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung. Außerdem liefert diese mit (1) $\varphi(p^\perp xp^\perp) = 0$, und wegen $p^\perp xp^\perp = x - px - xp + pxp$ gilt daher $\varphi(pxp) = 0$. Wäre nun $pxp > 0$, so gäbe es eine Spektralprojektion $0 \ne p_0 \le p$ von pxp mit $pxp \ge \lambda p_0$ für ein $\lambda > 0$. Nach der Definition von $\operatorname{supp}\varphi$ muss jedoch $\varphi(p_0) > 0$ und damit $\varphi(pxp) > 0$ sein, ein Widerspruch. □

Bemerkung. Ein normaler Zustand φ ist *vollständig additiv*, d. h. für jede orthogonale Familie $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ (also $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$) gilt

$$\varphi(\sum_{i\in I} e_i) = \sum_{i\in I} \varphi(e_i).$$

Dies folgt durch die Betrachtung des Netzes der Partialsummen von $\sum_{i\in I} e_i$.

Wir werden beweisen, dass ein normaler Zustand schwach-Operator-stetig auf der abgeschlossenen Einheitskugel ist. Dafür werden die nächsten beiden Lemmata benutzt.

Lemma 1.8.2. *Es sei φ ein normaler Zustand auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$. Dann existiert eine abzählbare, orthogonale Familie $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ und $(\xi_n) \subseteq H$ mit $\varphi(\sum_n e_n) = 1$ und*

$$\varphi(e_n x e_n) \leq \omega_{\xi_n}(x) \quad (x \in \mathcal{M}_+).$$

Sprechweise. Wenn wir im Folgenden von einer (bzgl. einer gewissen Eigenschaft) *maximalen* orthogonalen Familie $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ sprechen, so meinen wir stets eine Familie von Projektionen $e_i \neq 0$.

Beweis. Es sei $p := \operatorname{supp}\varphi$. Wenn wir (e_n) und (ξ_n) wie behauptet für $p\mathcal{M}p$ und $\varphi|_{p\mathcal{M}p}$ finden, so setzen wir $\xi_n' := p\xi_n$ für alle n; dann gilt

$$\varphi(e_n x e_n) = \varphi(e_n p x p e_n) \leq \omega_{\xi_n}(pxp) = \omega_{\xi_n'}(x) \quad (x \in \mathcal{M}_+).$$

Wir dürfen also $p = \mathbf{1}$ und damit nach dem letzten Lemma, (2), $\varphi(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{M}$, $x > 0$ annehmen.

Wir wählen nach dem Lemma von Zorn eine orthogonale Familie $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$, maximal bezüglich der Eigenschaft, dass eine Familie $\{\xi_i\}_{i\in I}$ existiert, so dass $\varphi(e_i x e_i) \leq \omega_{\xi_i}(x)$ für alle $x \in \mathcal{M}_+$. Wegen $\sum_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum_i e_i) \leq 1$ und $\varphi(e_i) > 0$ für alle $i \in I$ folgt, dass I abzählbar ist, und wir schreiben (e_n) für die Familie.

Wenn $\sum_n e_n = \mathbf{1}$ gilt, sind wir fertig. Sei ansonsten $e := \mathbf{1} - \sum_n e_n \neq 0$ und $\xi \in e(H)$ mit $\|\xi\| = 1$. Wir zeigen, dass $e_0 \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ mit $0 \neq e_0 \leq e$ existiert, so dass $\varphi(e_0 x e_0) \leq \omega_{e_0\xi}(x)$ für alle $x \in \mathcal{M}_+$; dies widerspricht dann der Maximalität von (e_n). Der Beweis erfolgt in zwei Schritten.

(1) Es reicht $\varphi(f) \leq \omega_\xi(f)$ für alle $f \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$, $f \leq e_0$, zu zeigen. Denn wir können $e_0 x e_0$ nach dem Spektralsatz durch eine Linearkombination $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$ orthogonaler Projektionen $f_1, \ldots, f_n$ mit $f_j \leq e_0$ und $\lambda_j \geq 0$ approximieren. Wegen $\varphi(f_j) \leq \omega_\xi(f_j)$ gilt dann $\varphi(\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j) \leq \omega_\xi(\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j)$, und somit $\varphi(e_0 x e_0) \leq \omega_\xi(e_0 x e_0) = \omega_{e_0\xi}(x)$.

(2) Gilt (1) nicht für $e_0 := e$, so existiert $f_0 \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$, $0 \neq f_0 \leq e$, mit $\varphi(f_0) > \omega_\xi(f_0)$. Es sei $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ eine maximale orthogonale Familie solcher Projektionen. Dann folgt

$$\omega_\xi(e) = 1 \geq \varphi(e) \geq \varphi(\sum_{i\in I} f_i) = \sum_{i\in I} \varphi(f_i) > \sum_{i\in I} \omega_\xi(f_i) = \omega_\xi(\sum_{i\in I} f_i),$$

also $0 \neq e_0 := e - \sum_{i\in I} f_i$. Wegen der Maximalität von $\{f_i\}$ folgt, dass (1) für e_0 gilt. $\square$

Lemma 1.8.3. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Ist φ stark-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}_+}$ in 0, so ist φ schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$.*

Beweis. Sei φ stark-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}_+}$ in 0. Weil die Abbildungen

$$x \mapsto x_+ \quad \text{und} \quad x \mapsto x_-$$

stark-Operator-stetig auf $\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}$ in 0 sind (wegen $x = x_+ - x_-$ und $x_+x_- = x_-x_+ = 0$ gilt $\|x\xi\|^2 = \|x_+\xi\|^2 + \|x_-\xi\|^2$ für alle $\xi \in H$), folgt, dass φ stark-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}_{\mathrm{sa}}}$ in 0 ist. Weiterhin sind die Abbildungen

$$x \mapsto \tfrac{1}{2}(x + x^*) \quad \text{und} \quad x \mapsto \tfrac{1}{2i}(x - x^*)$$

stark-Operator-stetig auf $\mathcal{M}$ in 0, und daher ist φ stark-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ in 0.

Es folgt, dass φ stark-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ ist: Denn ist $\{x_\alpha\} \subseteq B_{\mathcal{M}}$ ein Netz mit $x_\alpha \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie, so ist $\{\frac{1}{2}(x_\alpha - x)\} \subseteq B_{\mathcal{M}}$ und $\frac{1}{2}(x_\alpha - x) \longrightarrow 0$ in starker-Operator-Topologie. Daher gilt $\varphi(\frac{1}{2}(x_\alpha - x)) \longrightarrow 0$ und so $\varphi(x_\alpha) \longrightarrow \varphi(x)$.

Wir zeigen nun, dass φ schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ ist. Dazu betrachten wir Teilmengen $S \subseteq \mathbb{C}$ der Form $\{\pm \operatorname{Re} z \geq \alpha\}$ oder $\{\pm \operatorname{Im} z \geq \alpha\}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Sie sind konvex und abgeschlossen, und deswegen ist das Urbild $\varphi^{-1}(S) \cap B_{\mathcal{M}}$ konvex und stark-Operator-abgeschlossen. Nach Proposition 1.1.1, (2) ist dann $\varphi^{-1}(S) \cap B_{\mathcal{M}}$ auch schwach-Operator-abgeschlossen, und es folgt, dass die Urbilder der Komplemente $\mathbb{C} \setminus S$ schwach-Operator-offen in $B_{\mathcal{M}}$ sind. Da endliche Schnitte solcher Mengen eine Basis für offene Mengen in $\mathbb{C}$ bilden, können wir daraus auf die schwach-Operator-Stetigkeit von φ auf $B_{\mathcal{M}}$ schließen. □

Proposition 1.8.4. *Es sei φ ein normaler Zustand auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$. Dann ist φ schwach-Operator-stetig auf der abgeschlossenen Einheitskugel $B_{\mathcal{M}}$.*

Beweis. Nach dem letzten Lemma reicht es zu zeigen, dass φ stark-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ in 0 ist. Dazu wählen wir $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ und $(\xi_n) \subseteq H$ wie in Lemma 1.8.2. Zu $\varepsilon > 0$ wähle n mit $\varphi(\sum_{j=n+1}^{\infty} e_j) \leq \varepsilon^2$ und es sei $x \in B_{\mathcal{M}}$ mit $\|x\xi_j\| \leq \varepsilon/n$ für $1 \leq j \leq n$. Wir wenden nachfolgend mehrmals die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für positive Funktionale an. Es gilt $|\varphi(x)|^2 \leq \varphi(x^*x) = \varphi(x^*x \sum_{j=1}^{n} e_j) + \varphi(x^*x \sum_{j=n+1}^{\infty} e_j)$, wobei

$$\begin{aligned} \varphi(x^*x\textstyle\sum_{j=1}^{n}e_j) &= \textstyle\sum_{j=1}^{n}\varphi(|x||x|e_j) \leq \sum_{j=1}^{n}\varphi(x^*x)^{1/2}\varphi(e_jx^*xe_j)^{1/2} \\ &\leq \textstyle\sum_{j=1}^{n}\omega_{\xi_j}(x^*x) = \sum_{j=1}^{n}\|x\xi_j\| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

und $\varphi(x^*x \sum_{j=n+1}^{\infty} e_j) \leq \varphi((x^*x)^2)^{1/2}\varphi(\sum_{j=n+1}^{\infty} e_j)^{1/2} \leq \varepsilon$; daraus ergibt sich die Behauptung. □

Satz 1.8.5. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Für einen Zustand φ auf $\mathcal{M}$ sind äquivalent:*

(1) *φ ist σ-schwach-stetig,*

(2) *φ ist schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$,*

(3) *φ ist normal.*

Beweis. Die Äquivalenz (1)⇔(2) folgt aus Lemma 1.7.3.

(2)⇒(3) Ist φ schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$, so auch auf jeder beschränkten Menge $S \subseteq \mathcal{M}$. Es sei $\{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{M}_{\text{sa}}$ ein monoton steigendes, nach oben beschränktes Netz. Nach Satz 1.1.2 gilt $x_\alpha \longrightarrow \sup_\alpha x_\alpha$ in starker und somit auch in schwacher Operator-Topologie. Es folgt $\varphi(\sup_\alpha x_\alpha) = \lim_\alpha \varphi(x_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(x_\alpha)$ und φ ist normal.

(3)⇒(2) Dies ist gerade die Aussage der letzten Proposition. □

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass die Prädualen zweier *-isomorpher von Neumann-Algebren isomorph sind. Wir benötigen zunächst zwei Hilfsaussagen; K bezeichne einen Hilbertraum.

Lemma 1.8.6. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(K)$ ein *-Homomorphismus, so dass $\omega_\xi \circ \Phi$ ein normaler Zustand für alle $\xi \in K$, $\|\xi\| = 1$ ist. Dann ist $\Phi|_{B_{\mathcal{M}}}$ schwach-Operator-stetig.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass für alle $\xi, \eta \in K$ mit $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$ das lineare Funktional $x \mapsto \langle \Phi(x)\xi, \eta\rangle$ schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ ist, und nach Lemma 1.8.3 reicht es zu zeigen, dass das Funktional schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}_+}$ in 0 ist.

Ist $x \in \mathcal{M}_+$, so definiert $(\xi, \eta) \mapsto \langle \Phi(x)\xi, \eta\rangle$ ein Semi-Skalarprodukt auf H, und somit gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\langle \Phi(x)\xi, \eta\rangle|^2 \leq \langle \Phi(x)\xi, \xi\rangle\langle \Phi(x)\eta, \eta\rangle = \omega_\xi(\Phi(x))\omega_\eta(\Phi(x)).$$

Nach Voraussetzung sind $\omega_\xi \circ \Phi$ und $\omega_\eta \circ \Phi$ normale Zustände, also nach dem letzten Satz auf $B_{\mathcal{M}}$ schwach-Operator-stetige Funktionale. Deswegen ist $x \mapsto \langle \Phi(x)\xi, \eta\rangle$ schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}_+}$ in 0. □

Proposition 1.8.7. *Es seien $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(K)$ von Neumann-Algebren und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein *-Isomorphismus. Dann ist $\Phi|_{B_{\mathcal{M}}} : B_{\mathcal{M}} \to B_{\mathcal{N}}$ ein Homöomorphismus bezüglich schwacher Operator-Topologie.*

Beweis. Es sei daran erinnert, dass Φ isometrisch ist, so dass $\Phi(B_{\mathcal{M}}) = B_{\mathcal{N}}$ gilt. Weil Φ die Ordnungsstruktur erhält, gilt $\Phi(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \Phi(x_\alpha)$ für alle monoton steigenden, nach oben beschränkten Netze $\{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{M}_{\text{sa}}$. Für $\xi \in K$ mit $\|\xi\| = 1$ folgt

$$\langle \Phi(\sup_\alpha x_\alpha)\xi, \xi\rangle = \langle \sup_\alpha \Phi(x_\alpha)\xi, \xi\rangle = \sup_\alpha \langle \Phi(x_\alpha)\xi, \xi\rangle,$$

und damit ist $\omega_\xi \circ \Phi$ ein normaler Zustand. Nach dem letzten Lemma ist daher $\Phi|_{B_{\mathcal{M}}}$ schwach-Operator-stetig. Mit der gleichen Argumentation für Φ^{-1} folgt die schwach-Operator-Stetigkeit von $\Phi^{-1}|_{B_{\mathcal{N}}}$. □

Korollar 1.8.8. *Die Prädualen zweier *-isomorpher von Neumann-Algebren sind isometrisch isomorph.*

Beweis. Wir können die Prähduale $\mathcal{M}_*$ einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ mit den schwach*-stetigen, also den σ-schwach-stetigen Funktionalen auf $\mathcal{M}$ identifizieren; dies sind nach Lemma 1.7.3 gerade die auf $B_{\mathcal{M}}$ schwach-Operator-stetigen Funktionale. Das Korollar folgt daher aus dem letzten Lemma. □

Wir kommen zu einem weiteren wichtigen Resultat.

Satz 1.8.9. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ ein normaler Zustand, sowie $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(H_\varphi)$ die GNS-Darstellung von $\mathcal{M}$ zu φ. Dann ist Φ schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ und $\Phi(\mathcal{M})$ ist eine von Neumann-Algebra.*

Beweis. Unter Benutzung von Lemma 1.8.6 reicht es für die erste Aussage zu zeigen, dass $\omega_\xi \circ \Phi$ für alle $\xi \in H_\varphi$, $\|\xi\|_\varphi = 1$, normal ist. Hierbei sei daran erinnert, dass H_φ die Vervollständigung des Raums $\mathcal{M}/N_\varphi$ mit dem Skalarprodukt $\langle x + N_\varphi, y + N_\varphi\rangle := \varphi(y^*x)$ ist, wobei $N_\varphi := \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) = 0\}$ (vgl. A.3, Ende).

Wir betrachten zuerst den Fall $\xi = y + N_\varphi \in H_\varphi$, wobei $y \in \mathcal{M}$. Dann ist

$$\omega_\xi(\Phi(x)) = \langle \Phi(x)(y + N_\varphi), y + N_\varphi\rangle = \langle xy + N_\varphi, y + N_\varphi\rangle = \varphi(y^*xy) \quad (x \in \mathcal{M}).$$

Wir zeigen, dass $\omega_\xi \circ \Phi = \varphi(y^* \cdot y)$ normal bzw. schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ ist. Es sei $\{x_\alpha\} \subseteq B_{\mathcal{M}}$ ein Netz mit $x_\alpha \longrightarrow x$ in schwacher Operator-Topologie. Man verifiziert sofort, dass dann $y^*x_\alpha y \longrightarrow y^*xy$ in schwacher Operator-Topologie. Weil $\{y^*x_\alpha y\}$ ein beschränktes Netz ist, folgt $\varphi(y^*x_\alpha y) \longrightarrow \varphi(y^*xy)$, weil φ als normaler Zustand schwach-Operator-stetig auf beschränkten Mengen ist.

Ist nun $\xi \in H_\varphi$ beliebig gegeben, so existiert eine Folge $(\xi_n) \subseteq H_\varphi$ der Form $\xi_n = y_n + N_\varphi$ mit $y_n \in \mathcal{M}$, so dass $\xi_n \longrightarrow \xi$. Dann folgt $\omega_{\xi_n} \circ \Phi \longrightarrow \omega_\xi \circ \Phi$, und weil alle $\omega_{\xi_n} \circ \Phi$ normal bzw. schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ sind, gilt dies auch für $\omega_\xi \circ \Phi$.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{N} := \Phi(\mathcal{M})$ eine von Neumann-Algebra ist. Jedenfalls ist $\mathcal{N}$ eine C^*-Algebra (vgl. A.2, Bemerkung (10)). Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist daher $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ offen, so dass $r > 0$ existiert mit $\Phi(B_{\mathcal{M}}) \supseteq rB_{\mathcal{N}}$. Weil $B_{\mathcal{M}}$ kompakt in schwacher Operator-Topologie ist, folgt, dass $\Phi(B_{\mathcal{M}})$ kompakt und damit abgeschlossen in schwacher Operator-Topologie ist. Deswegen ist der schwach-Operator-Abschluss von $rB_{\mathcal{N}}$ in $\Phi(B_{\mathcal{M}}) \subseteq \mathcal{N}$ enthalten, und dies impliziert, dass $B_{\mathcal{N}}$ schwach-Operator-abgeschlossen ist. Nach Korollar 1.3.4 ist $\mathcal{N}$ eine von Neumann-Algebra. □

1.9. Zyklische und separierende Mengen

Definition. *Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra. Eine Teilmenge $S \subseteq H$ heißt* zyklisch *für $\mathcal{M}$, falls*

$$\operatorname{Spann} \mathcal{M}S := \operatorname{Spann}\{x\xi \mid x \in \mathcal{M}, \xi \in S\}$$

dicht in H ist; und S heißt separierend *für $\mathcal{M}$, falls $x \in \mathcal{M}$ und $x\xi = 0$ für alle $\xi \in S$ bereits $x = 0$ impliziert.*

Im Fall $S = \{\xi_0\}$ heißt $\xi_0 \in H$ entsprechend zyklischer bzw. separierender Vektor.

Proposition 1.9.1. *Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra. Dann ist $S \subseteq H$ genau dann zyklisch für $\mathcal{M}$, falls S separierend für $\mathcal{M}'$ ist.*

Beweis. $\Rightarrow$ Sei S zyklisch für $\mathcal{M}$, und $y \in \mathcal{M}'$ mit $y\xi = 0$ für alle $\xi \in S$. Für alle $x \in \mathcal{M}$ und alle $\xi \in S$ gilt dann $0 = xy\xi = yx\xi$. Weil S zyklisch für $\mathcal{M}$ ist, folgt $y = 0$.

$\Leftarrow$ (Kontraposition) Sei S nicht zyklisch für $\mathcal{M}$, sowie K der Abschluss von Spann $\mathcal{M}S$ und $e \in \mathcal{L}(H)$ die Projektion auf K, also $e \neq \mathbf{1}$. Für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt dann $x(K) \subseteq K$ und $x^*(K) \subseteq K$, also $xe = exe$ und $x^*e = ex^*e$; es folgt $ex = (x^*e)^* = (ex^*e)^* = exe = xe$. Also ist $e \in \mathcal{M}'$ und damit $\mathbf{1} - e \in \mathcal{M}'$. Es ist $\mathbf{1} - e \neq 0$, aber $(\mathbf{1} - e)\xi = 0$ für alle $\xi \in S$, d. h. S ist nicht separierend für $\mathcal{M}'$. □

Definition. *Eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \in \mathcal{L}(H)$ heißt* σ-endlich, *falls jede orthogonale Familie $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}} \setminus \{0\}$ abzählbar ist.*

Bemerkung. Jede von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ auf einem separablen Hilbertraum H ist σ-endlich.

Unter einem *treuen* Zustand $\varphi : A \to \mathbb{C}$ auf einer C^*-Algebra verstehen wir einen Zustand φ mit

$$\varphi(x^*x) = 0 \text{ impliziert } x = 0 \quad (x \in A).$$

Satz 1.9.2. *Für eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ sind äquivalent:*

(1) *$\mathcal{M}$ ist σ-endlich,*

(2) *es existiert eine abzählbare separierende Menge $S \subseteq H$ für $\mathcal{M}$,*

(3) *es existiert ein treuer, normaler Zustand auf $\mathcal{M}$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Wir bemerken zunächst, dass für jedes $\xi_0 \in H$ die Projektion e auf den Abschluss von $\mathcal{M}'\xi_0$ in $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ liegt (vgl. Beweis von Proposition 1.9.1); wir wollen solche Projektionen *zyklisch* nennen.

Nach dem Lemma von Zorn existiert eine maximale orthogonale Familie $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ zyklischer Projektionen. Wäre $e := \mathbf{1} - \bigvee_i e_i \neq 0$, dann existierte $0 \neq \xi_0 \in \operatorname{Bild} e$ und die Projektion e_0 auf den Abschluss von $\mathcal{M}'\xi_0 = \mathcal{M}'e\xi_0 = e\mathcal{M}'\xi_0$ erfüllte $0 \neq e_0 \leq e$, im Widerspruch zur Maximalität von $\{e_i\}_{i\in I}$; also ist $\bigvee_i e_i = \mathbf{1}$. Ist e_i die Projektion auf den Abschluss von $\mathcal{M}'\xi_i$, so ist $S := \{\xi_i \mid i \in I\}$ zyklisch für $\mathcal{M}'$, und somit nach Proposition 1.9.1 separierend für $\mathcal{M}$. Nach Voraussetzung ist I und damit S abzählbar.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sei $S =: \{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und o. E. $\|\xi_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Zustand

$$\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \langle x\xi_n, \xi_n \rangle \quad (x \in \mathcal{M}).$$

Es ist φ als Grenzwert einer Folge schwach-Operator-stetiger Funktionale schwach-Operator-stetig auf $B_{\mathcal{M}}$ und damit normal. Ist $x \in \mathcal{M}$ mit $\varphi(x^*x) = 0$, so ist $x\xi_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil S separierend für $\mathcal{M}$ ist, folgt $x = 0$, d. h. φ ist treu.

(3) $\Rightarrow$ (1) Ist φ ein normaler treuer Zustand auf $\mathcal{M}$ und $\{e_\alpha\}$ eine Familie orthogonaler Projektionen, so ist $1 = \varphi(\mathbf{1}) \geq \varphi(\sum_\alpha e_\alpha) = \sum_\alpha \varphi(e_\alpha)$. Also ist $\varphi(e_\alpha) = 0$ und somit $e_\alpha = 0$ für alle bis auf abzählbar viele α. □

Satz 1.9.3. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(H_\varphi)$ die GNS-Darstellung zu einem treuen, normalen Zustand φ. Dann ist $\mathcal{N} := \Phi(\mathcal{M})$ eine von Neumann-Algebra mit zyklischem und separierendem Vektor und $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ist ein *-Isomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 1.8.9 ist $\mathcal{N}$ eine von Neumann-Algebra. Für $\xi_0 := \mathbf{1} + N_\varphi \in H_\varphi$ gilt

$$\Phi(x)\xi_0 = x\mathbf{1} + N_\varphi = x + N_\varphi \quad (x \in \mathcal{M}),$$

also ist ξ_0 zyklisch. Nun ist $N_\varphi = \{0\}$, weil φ treu ist; hieraus erkennt man die Injektivität des *-Homomorphismus Φ, und dass ξ_0 separierend ist. □

1.10. Gewichte und Spuren

Bei der (klassischen) Integrationstheorie erweisen sich auch nicht-endliche Maße bzw. Integrale als interessant und technisch nützlich. Auch im Nicht-kommutativem benötigen wir nicht-endliche Funktionale, namentlich Gewichte und Spuren.

Gewichte

Definition. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Ein* Gewicht *φ auf $\mathcal{M}$ ist eine additive und positiv homogene Abbildung $\varphi : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$. Ferner sei*

$$n_\varphi := \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < \infty\},$$
$$f_\varphi := \{x \in \mathcal{M}_+ \mid \varphi(x) < \infty\}, \quad m_\varphi := \operatorname{Spann} f_\varphi.$$

Das Gewicht heißt

- treu*, falls $\varphi(x^*x) = 0$ impliziert $x = 0$,*
- semifinit*, falls m_φ schwach-Operator-dicht in $\mathcal{M}$ ist,*
- normal*, falls es eine Famile $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ normaler, positiver Funktionale gibt mit $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x)$ für alle $x \in \mathcal{M}_+$.*

Bemerkung. (1) Für ein normales Gewicht $\varphi : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$ gilt

$$\varphi(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(x_\alpha), \tag{$*$}$$

für jedes monoton steigende, nach oben beschränkte Netz $\{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{M}_+$.

Denn mit $x := \sup_\alpha x_\alpha$ und den φ_i wie in der Definition gilt $\varphi(x) = \sum_i \varphi_i(x) = \sum_i \sup_\alpha \varphi_i(x_\alpha) = \sup_\alpha \sum_i \varphi_i(x_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(x_\alpha)$ (man erkennt leicht die Legitimität der Vertauschung $\sum_i \sup_\alpha = \sup_\alpha \sum_i$).

(2) Man kann zeigen, dass ein Gewicht $\varphi : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$, welches $(*)$ erfüllt bereits normal ist (siehe [Haa75] oder [Tak03], Abschnitt VII.1).

Beispiele. (1) Wir betrachten die Multiplikations-Algebra $\mathcal{A} = \{m_g \mid g \in L_\infty(\mathbb{R})\} \cong L_\infty(\mathbb{R})$ aus Proposition 1.2.2. Das Lebesgue-Integral

$$\varphi : \mathcal{A}_+ \to [0,\infty], \quad m_g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(t)dt \quad (g \in L_\infty(\mathbb{R})_+)$$

ist ein Beispiel für ein Gewicht auf $\mathcal{A}$, und es gilt $n_\varphi \cong L_\infty(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ und $m_\varphi \cong L_\infty(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass φ treu, semifinit und normal ist.

(2) Auf $\mathcal{M} = \mathcal{L}(H)$ betrachten wir das Gewicht

$$\mathrm{tr} : \mathcal{L}(H)_+ \to [0,\infty], \quad x \mapsto \sum_{i\in I} \langle x\varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle,$$

wobei $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von H sei. Wiederum zeigt sich, dass tr treu, semifinit und normal ist; hier ist n_{tr} die Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren $\mathcal{L}_2(H)$, sowie m_{tr} die Spurklasse $\mathcal{L}_1(H)$.

Lemma 1.10.1. *Sei φ ein Gewicht auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$.*

(1) *Es ist n_φ ein Linksideal, und es gilt $m_\varphi = \operatorname{Spann} n_\varphi^* n_\varphi \subseteq n_\varphi \cap n_\varphi^*$.*

(2) *Es ist φ genau dann semifinit, falls n_φ schwach-Operator-dicht in $\mathcal{M}$ ist.*

(3) *Es gilt $m_\varphi^+ := m_\varphi \cap \mathcal{M}_+ = f_\varphi$ und $\varphi|_{f_\varphi}$ lässt sich in eindeutiger Weise zu einem positiven Funktional auf m_φ erweitern.*

Beweis. (1) Wegen $(x+y)^*(x+y) - (x+y)^*(x-y) = 2(x^*x + y^*y)$ gilt

$$(x+y)^*(x+y) \le 2(x^*x + y^*y) \quad (x,y \in \mathcal{M});$$

daher ist n_φ ein Vektorraum. Weitherin gilt $(ax)^*(ax) = x^*a^*ax \le \|a\|^2 x^*x$ für alle $a, x \in \mathcal{M}$, also ist n_φ ein Linksideal.

Ist $x \in f_\varphi$, so ist $x^{1/2} \in n_\varphi$, also $x = x^{1/2}x^{1/2} \in n_\varphi^* n_\varphi$; es folgt also $m_\varphi \subseteq \operatorname{Spann} n_\varphi^* n_\varphi$. Die Polarisationsidentität

$$y^*x = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (x + i^k y)^*(x + i^k y) \quad (x,y \in \mathcal{M})$$

zeigt andererseits $n_\varphi^* n_\varphi \subseteq m_\varphi$ und damit ist $m_\varphi = \operatorname{Spann} n_\varphi^* n_\varphi$.

Sind $x, y \in n_\varphi$, so ist $y^*x \in n_\varphi \cap n_\varphi^*$, weil n_φ ein Links- und n_φ^* ein Rechtsidal ist. Daher folgt $\operatorname{Spann} n_\varphi^* n_\varphi \subseteq n_\varphi \cap n_\varphi^*$.

(2) Ist φ semifinit, so ist m_φ schwach-Operator-dicht in $\mathcal{M}$ und wegen (1) gilt dies auch für $n_\varphi \cap n_\varphi^*$ und somit auch für n_φ.

Ist umgekehrt n_φ schwach-Operator-dicht, so ist auch n_φ^* schwach-Operator-dicht und damit stark-Operator-dicht. Es gibt also ein Netz $\{y_\alpha\} \subseteq n_\varphi$ mit $y_\alpha^* \longrightarrow \mathbf{1}$ in starker Operator-Topologie. Für alle $x \in n_\varphi$ ist daher nach (1) $\{y_\alpha x\}$ ein Netz in m_φ mit $y_\alpha x \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie. Hieraus folgt, dass m_φ stark-Operator-dicht und damit schwach-Operator-dicht ist.

(3) Jedes $x \in m_\varphi$ hat eine Darstellung $x = \sum_{k=0}^3 i^k x_k$ mit $x_k \in f_\varphi$. Im Fall $x \in m_\varphi^+$ folgt $0 \le x = x_0 - x_2 \le x_0$, also $\varphi(x) \le \varphi(x_0) < \infty$ und damit $x \in f_\varphi$; wegen $m_\varphi^+ \supseteq f_\varphi$ gilt also $m_\varphi^+ = f_\varphi$.

Ist nun $x = \sum_{k=0}^3 i^k y_k$ eine weitere Darstellung von $x \in m_\varphi$ mit $y_k \in f_\varphi$, so folgt $x_0 - x_2 = y_0 - y_2$ und $ix_1 - ix_3 = iy_1 - iy_3$. Daher ist $\varphi(x_0) + \varphi(y_2) = \varphi(y_0) + \varphi(x_2)$ und $\varphi(x_1) + \varphi(y_3) = \varphi(y_1) + \varphi(x_3)$. Daher wird durch

$$\varphi(x) := \sum_{k=0}^3 i^k \varphi(x_k) = \sum_{k=0}^3 i^k \varphi(y_k)$$

das gewünschte positive Funktional auf m_φ definiert und die Eindeutigkeit ist klar. $\square$

Wir definieren den *Träger* eines normalen Gewichts φ wie bei einem positiven Funktional:

$$(\operatorname{supp}\varphi)^\perp := \bigvee\{e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}} \mid \varphi(e) = 0\}.$$

Lemma 1.10.2. *Es sei φ ein normales Gewicht auf $\mathcal{M}$ mit Träger $p := \operatorname{supp}\varphi$.*

(1) *Es gilt $\varphi(p^\perp) = 0$.*

(2) *Ist $N_\varphi := \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) = 0\}$, so gilt $\mathcal{M}p^\perp = N_\varphi$.*

Beweis. (1) Weil ein normales Gewicht die Summe normaler positiver Funktionale ist, überträgt sich der Beweis von Lemma 1.8.1 auf diese Situation.

(2) $\subseteq$ Es sei $x \in \mathcal{M}$, dann ist $\varphi(p^\perp x^* x p^\perp) \le \|x^*x\|\varphi(p^\perp) = 0$.

$\supseteq$ Es sei $x \in N_\varphi$, also $\varphi(x^*x) = 0$. Nach Lemma 1.8.1, (2), gilt $px^*xp = 0$ und damit $xp = 0$. Hieraus folgt $x = xp^\perp \in \mathcal{M}p^\perp$. $\square$

Spuren

Definition. *Eine* Spur *auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ ist ein Gewicht $\tau : \mathcal{M}_+ \to [0,\infty]$, so dass*

$$\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \quad (x \in \mathcal{M}).$$

Bemerkung. (1) Eine Spur erfüllt $\tau(uau^*) = \tau(a)$ für alle $a \in \mathcal{M}_+$ und u unitär; setze dafür $x = ua^{1/2}$.

(2) Bei den Beispielen für Gewichte, also beim Lebesgue-Integral φ auf $\mathcal{A} := \{m_g \mid g \in L_\infty(\mathbb{R})\}$ und beim Gewicht tr auf $\mathcal{L}(H)$, handelt es sich um Spuren. Beachte hierfür, dass $\operatorname{tr}(x^*x) = \|x\|_2 = \|x^*\|_2 = \operatorname{tr}(xx^*)$, wobei $\|\cdot\|_2$ die Hilbert-Schmidt-Norm sei (vgl. [Wer02], Abschnitt VI.6).

Lemma 1.10.3. *Es sei τ eine Spur auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$. Dann gilt:*

(1) *n_τ und m_τ sind beidseitige Ideale in $\mathcal{M}$,*

(2) *$\tau(xy) = \tau(yx)$ falls $x, y \in n_\tau$ oder falls $x \in \mathcal{M}, y \in m_\tau$.*

Beweis. (1) Das Linksideal n_τ ist nun selbstadjungiert, und daher auch ein Rechtsideal. Folglich ist auch $m_\tau = \operatorname{Spann} n_\tau^* n_\tau$ ein beidseitiges Ideal.

(2) In beiden Fällen sind $xy, yx \in m_\tau$ und $\tau(xy)$ bzw. $\tau(yx)$ sind definiert. Im ersten Fall folgt die Gleichheit durch die Polarisationsformel $y^*x = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k(x+i^k y)^*(x+i^k y)$. Im zweiten Fall sei o. E. $y \in f_\tau$, so dass $y^{1/2} \in n_\tau$; es folgt $xy^{1/2}, y^{1/2}x \in n_\tau$ und mit dem ersten Fall $\tau(xy) = \tau(xy^{1/2}y^{1/2}) = \tau(y^{1/2}xy^{1/2}) = \tau(y^{1/2}y^{1/2}x) = \tau(yx)$. □

1.11. Partielle Isometrien und äquivalente Projektionen

Definition. *Es seien H, K Hilberträume und $H_0 \subseteq H$, $K_0 \subseteq K$ abgeschlossene Teilräume. Eine* partielle Isometrie *mit* initialem Raum H_0 *und* finalem Raum K_0 *ist ein Operator $v \in \mathcal{L}(H,K)$, so dass*

$$v|_{H_0} : H_0 \to v(H_0) = K_0$$

eine Isometrie ist, und $v|_{H_0^\perp} = 0$.

Lemma 1.11.1. *Es ist $v \in \mathcal{L}(H,K)$ genau dann eine partielle Isometrie, wenn v^*v eine Projektion ist. In diesem Fall ist v^*v die Projektion auf den initialen Raum und vv^* die Projektion auf den finalen Raum.*

Beweis. $\Leftarrow$ Ist v^*v eine Projektion und $H_0 := v^*v(H)$, so gilt

$$\langle v\xi, v\xi\rangle = \langle v^*v\xi, \xi\rangle = \begin{cases} \langle \xi, \xi\rangle & \text{für } \xi \in H_0 \\ 0 & \text{für } \xi \in H_0^\perp, \end{cases}$$

also ist v eine partielle Isometrie.

$\Rightarrow$ Es sei v eine partielle Isometrie mit initialem Raum H_0, sowie e die Projektion auf H_0. Für $\xi \in H$, $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in H_0$, $\xi_2 \in H_0^\perp$, gilt

$$\langle v^*v\xi, \xi\rangle = \langle v\xi_1, v\xi_1\rangle + \langle v\xi_1, v\xi_2\rangle + \langle v\xi_2, v\xi_1\rangle + \langle v\xi_2, v\xi_2\rangle = \langle \xi_1, \xi_1\rangle,$$

ebenso wie $\langle e\xi, \xi\rangle = \langle e\xi, e\xi\rangle = \langle \xi_1, \xi_1\rangle$, so dass $e = v^*v$.

In diesem Fall gilt $vv^*v = ve = v$ und somit $vv^*vv^* = vv^*$, so dass $f := vv^*$ eine Projektion mit $fv = v$ ist; es gilt also $f(H) \supseteq v(H)$. Weiterhin gilt $f(H) = vv^*(H) \subseteq v(H)$, also ist f die Projektion auf den finalen Raum $K_0 = v(H)$. □

Definition. *Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Zwei Projektionen $e, f \in \mathcal{M}$ heißen* äquivalent *($e \sim f$), falls eine partielle Isometrie $v \in \mathcal{M}$ existiert, so dass $v^*v = e$ und $vv^* = f$.*

Bemerkung. (1) Zwei Projektionen $e, f \in \mathcal{M}$ sind also genau dann äquivalent, wenn sich ihre Bilder durch eine partielle Isometrie $v \in \mathcal{M}$ ineinander überführen lassen. Im Fall $\mathcal{M} = \mathcal{L}(H)$ sind also zwei Projektionen genau dann äquivalent, wenn ihre Bilder die gleiche Dimension haben.

(2) Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und τ eine Spur auf $\mathcal{M}$. Für zwei äquivalente Projektionen $e, f \in \mathcal{M}$ gilt dann $\tau(e) = \tau(f)$.

(3) Die Äquivalenz $\sim$ von Projektionen wurde von Murray und von Neumann eingeführt, um sog. *Faktoren* (von Neumann-Algebren $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}\mathbf{1}$) zu klassifizieren. Wir geben hiervon eine grobe Skizze:
Es ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ und die Inklusion induziert eine partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen $\mathcal{M}_{\mathrm{proj}}/\sim$, die total ist, falls $\mathcal{M}$ ein Faktor ist. In diesem Fall ist $\mathcal{M}_{\mathrm{proj}}/\sim$ isomorph zu einer der folgenden Mengen:

- $\{1, \ldots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (*Typ* I_n),
- $[0, 1]$ (*Typ* II_1) oder $[0, \infty]$ (*Typ* II_∞),
- $\{0, \infty\}$ (*Typ III*).

Typ I_n-Faktoren sind *-ismorph zu $\mathcal{L}(H)$, während bei einem Typ III-Faktor je zwei Projektionen $e, f \neq 0$ äquivalent sind.

Im Zusammenhang mit Spuren sind sog. semifinite von Neumann-Algebren von Bedeutung.

Definition. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Eine Projektion $e \in \mathcal{M}$ heißt* endlich*, falls es keine zu e äquivalente Projektion $e_0 < e$ gibt.*
Die von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ heißt semifinit*, falls es zu jeder Projektion $e \neq 0$ eine endliche Projektion $0 \neq e_0 \leq e$ gibt.*

Beispiele. (1) Es sei $\mathcal{M} = \mathcal{L}(H)$. Dann sind die endlichen Projektionen gerade die mit endlich-dimensionalem Bild. Es folgt, dass $\mathcal{L}(H)$ semifinit ist.

(2) Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra. Dann sind Projektionen genau dann äquivalent, wenn sie gleich sind. Somit ist jede Projektion endlich und $\mathcal{M}$ ist semifinit.

Bemerkung. (1) Jede von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ mit einer semifiniten, treuen Spur τ ist semifinit.
Denn sei $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ und $e \neq 0$. Wegen der Semifinitheit von τ ist $n_\tau \supseteq m_\tau$ schwach-Operator-dicht in $\mathcal{M}$ und es existiert $x \in n_\tau$ mit $ex \neq 0$. Es folgt $y := ex^*xe \in n_\tau^* n_\tau \subseteq m_\tau$ und somit $y \in f_\tau$. Für eine Spektralprojektion e_0 von y derart, dass $0 \neq \gamma e_0 \leq y$ für ein $\gamma > 0$, gilt dann $e_0 \leq e$ und $e_0 \in f_\tau$. Es ist e_0 dann endlich; denn ist $e_0 \sim f \leq e_0$, so gilt $\tau(e_0) = \tau(f)$, also $\tau(e_0 - f) = 0$ und somit $f = e_0$, weil τ treu ist.

(2) Umgekehrt besitzt jede semifinite von Neumann-Algebra eine normale, semifinite, treue Spur (der Beweis hierfür ist aber recht aufwändig).

2. Unbeschränkte Operatoren und von Neumann-Algebren

Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein σ-endlicher, regulärer Maßraum. Dann kann der klassische Raum $L_\infty(\mu)$ als von Neumann-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mu))$ dargestellt werden, und zwar ist $\mathcal{A}$ das Bild der Einbettung

$$L_\infty(\mu) \to \mathcal{L}(L_2(\mu)), \quad g \mapsto M_g,$$

wobei $M_g(f) = gf$ für $g \in L_\infty(\mu)$ und $f \in L_2(\mu)$ ist.

Möchte man den klassischen Raum $L_p(\mu)$ ($p < \infty$) auf die gleiche Weise einbetten, so ergibt sich im Allgemeinen ein Problem, weil z. B. für $g \in L_p(\mathbb{R})$ der „Operator“ M_g unstetig und nicht einmal auf ganz $L_2(\mathbb{R})$ definiert ist; es ist M_g ein Beispiel für einen „unbeschränkten Operator“.

Diese Beobachtung ist ein Indiz dafür, dass bei einer nicht-kommutativen Integrationstheorie, die die klassischen (kommutativen) Räume $L_p(\mu)$ enthalten soll, unbeschränkte Operatoren notwendig sind. Weiterhin werden unbeschränkte Operatoren bei der Modular-Theorie eine wesentliche Rolle spielen.

Die Darstellung der Theorie der unbeschränkten Operatoren im Zusammenhang mit von Neumann-Algebren orientiert sich an [KaR83], Sections 2.7, 5.6.

2.1. Unbeschränkte Operatoren

Grundlegendes

Hier bezeichnen H und K stets komplexe Hilberträume.

Wir möchten die Klasse der beschränkten (stetigen) Operatoren $\mathcal{L}(H, K)$ zwischen Hilberträumen H und K erweitern. Um ein „anständiges“ Grenzwertverhalten zu bewahren, betrachten wir Operatoren mit abgeschlossenem Graphen und lassen sodann zu, dass der Definitionsbereich eingeschränkt wird (ansonsten würde aufgrund des Satzes vom abgeschlossenen Graphen die Klasse $\mathcal{L}(H, K)$ nicht erweitert).

Definition. *Ein* (unbeschränkter) Operator *A von H nach K ist eine auf einem Teilraum $D(A) \subseteq H$ definierte, lineare Abbildung nach K. Der Operator A ist*

- abgeschlossen*, falls der Graph $G(A) = \{(\xi, A\xi) \mid \xi \in D(A)\} \subseteq H \times K$ abgeschlossen ist,*
- dicht definiert*, falls $D(A)$ dicht in H ist.*

Im Fall $H = K$ sprechen wir von einem unbechränkten Operator *auf* H.

Seien A, B unbeschränkte Operatoren von H nach K. Wir sagen, B ist eine *Erweiterung* von A ($A \subseteq B$), falls $G(A) \subseteq G(B)$, d. h. falls

$$D(A) \subseteq D(B) \text{ und } A\xi = B\xi \ (\xi \in D(A)).$$

Es heißt A *abschließbar*, falls A eine abgeschlossene Erweiterung B besitzt.

Bemerkung. Man zeigt leicht, dass ein Teilraum $G \subseteq H \times K$ genau dann Graph eines unbeschränkten Operators ist, falls $(0, \eta) \in G$ impliziert $\eta = 0$, wobei $\eta \in K$. Insbesondere ist jeder Teilraum eines solchen Graphen wieder Graph eines unbeschränkten Operators.

Ist A ein abschließbarer Operator mit abgeschlossener Erweiterung B, so ist also $\overline{G(A)} \subseteq G(B)$ der Graph eines Operators $\overline{A}$, dem sog. *Abschluss* von A.
Ist A abgeschlossen, so heißt ein Teilraum $D_0 \subseteq D(A)$ ein *determinierender Bereich* für A, falls $\overline{G(A|_{D_0})} = G(A)$.

Der adjungierte Operator

Definition. *Zu einem dicht definierten Operator A von H nach K sei der* adjungierte Operator *A^* von K nach H gegeben durch*

$$D(A^*) = \{\eta \in K \mid \textit{ex. } \zeta \in H \textit{ mit } \langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \zeta\rangle \ (\xi \in D(A))\}$$

und $A^*\eta = \zeta$ für $\eta \in D(A^*)$ mit $\zeta \in H$, so dass $\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \zeta\rangle$ für alle $\xi \in D(A)$; ein derartiges ζ ist aufgrund der Dichtheit von $D(A)$ eindeutig.

Bemerkung. Es gilt also

$$\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A^*\eta\rangle \quad (\xi \in D(A), \eta \in D(A^*)),$$

und ferner aufgrund des Darstellungssatzes von Riesz, dass

$$D(A^*) = \{\eta \in K \mid \xi \mapsto \langle A\xi, \eta\rangle \ (\xi \in D(A)) \text{ ist stetig}\}.$$

Lemma 2.1.1. *Es sei A ein dicht definierter Operator von H nach K, dann gilt*

$$G(A^*) = U(G(A)^\perp) = (UG(A))^\perp,$$

wobei $U \in \mathcal{L}(H \times K, K \times H)$ der durch $(\xi, \eta) \mapsto (\eta, -\xi)$ definierte unitäre Operator sei.

Beweis. Nach Definition ist $(\eta, \zeta) \in G(A^*)$ genau dann, falls $\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \zeta\rangle$ für alle $\xi \in D(A)$, also genau dann, falls

$$0 = \langle \xi, -\zeta\rangle + \langle A\xi, \eta\rangle = \langle (\xi, A\xi), (-\zeta, \eta)\rangle \text{ für alle } \xi \in D(A),$$

d. h. falls $U^{-1}(\eta, \zeta) = (-\zeta, \eta) \in G(A)^\perp$. Da U unitär ist, gilt weiterhin $U(G(A)^\perp) = (UG(A))^\perp$. □

Bemerkung. Eine direkte Folgerung aus diesem Lemma ist, dass für dicht definierte Operatoren A, B mit $A \subseteq B$ gilt $B^* \subseteq A^*$.

Proposition 2.1.2. *Sei A ein dicht definierter Operator von H nach K.*

(1) *A^* ist ein abgeschlossener Operator von K nach H, und es gilt* $\operatorname{Kern} A^* = (\operatorname{Bild} A)^\perp$*;*

(2) *A^* ist genau dann dicht definiert, falls A abschließbar ist;*

(3) *Ist A abschließbar, so gilt $A^* = \overline{A}^*$ und $\overline{A} = A^{**}$.*

Beweis. (1) Nach Lemma 2.1.1 ist $G(A^*)$ abgeschlossen. Ferner ist $A^*\eta = 0$ äquivalent zu $0 = \langle A^*\eta, \xi\rangle = \langle \eta, A\xi\rangle$ für alle $\xi \in D(A)$, also zu $\eta \in (\operatorname{Bild} A)^\perp$.

(2) Wir zeigen

$$\{\eta \in K \mid (0,\eta) \in \overline{G(A)}\} = D(A^*)^\perp.$$

Nach Lemma 2.1.1 ist $\overline{G(A)} = G(A)^{\perp\perp} = (U^{-1}G(A^*))^\perp$, also $(0,\eta) \in \overline{G(A)}$ genau dann, falls $0 = \langle (0,\eta), (-\zeta', \eta')\rangle = \langle \eta, \eta'\rangle$ für alle $(\eta', \zeta') \in G(A^*)$, d. h. falls $\eta \in D(A^*)^\perp$; dies war zu zeigen.

Es ist nun A abschließbar genau dann, falls $\overline{G(A)}$ der Graph eines Operators ist, also falls $\{\eta \in K \mid (0,\eta) \in \overline{G(A)}\} = \{0\} = D(A^*)^\perp$ ist, d. h. falls $D(A^*)$ dicht in K ist.

(3) Wegen $G(A)^\perp = \overline{G(A)}^\perp$ und Lemma 2.1.1 gilt $A^* = \overline{A}^*$. Eine Anwendung dieses Lemmas auf A^* ($-U^{-1}$ übernimmt dann die Rolle von U) und dann auf A liefert weiterhin

$$G(A^{**}) = (-U^{-1}G(A^*))^\perp = (-U^{-1}(UG(A))^\perp)^\perp = (-G(A))^{\perp\perp} = \overline{G(A)},$$

also $A^{**} = \overline{A}$. □

Wir kommen nun auf das Beispiel vom Anfang dieses Kapitels zu sprechen.

Proposition 2.1.3. *Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $g : \Omega \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion.*

(1) *Durch $M_g(f) = gf$ wird ein dicht definierter, abgeschlossener Operator auf $L_2(\mu)$ mit $D(M_g) := \{f \in L_2(\mu) \mid gf \in L_2(\mu)\}$ angegeben.*

(2) *Es gilt $M_g^* = M_{\overline{g}}$.*

Beweis. Es sei $\Omega_n := \{\omega \in \Omega \mid |g(\omega)| \le n\}$, so dass $\bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n = \Omega$.

(1) Man sieht leicht, dass $D(M_g) \subseteq L_2(\mu)$ ein Teilraum ist und dass M_g linear auf $D(M_g)$ ist. Wir zeigen, dass $D(M_g) \subseteq L_2(\mu)$ dicht ist: Sei $f \in L_2(\mu)$ gegeben, dann gilt $f\chi_{\Omega\setminus\Omega_n} \longrightarrow 0$ punktweise und somit in L_2, nach dem Grenzwertsatz von Lebesgue. Es folgt $f\chi_{\Omega_n} \longrightarrow f$ in L_2 und somit wegen $f\chi_{\Omega_n} \in D(M_g)$ die behauptete Dichtheit.

Um zu zeigen, dass M_g abgeschlossen ist, sei $(f_n) \subseteq L_2(\mu)$ eine Folge und $f, h \in L_2(\mu)$ mit $f_n \longrightarrow f$ und $M_g f_n \longrightarrow h$, jeweils in L_2. Dann existiert eine Teilfolge (n_k), so dass $f_{n_k} \to f$ und $gf_{n_k} \longrightarrow h$ f. ü. punktweise (siehe [Rud74], Theorem 3.12). Wegen $gf_{n_k} \longrightarrow gf$ f. ü. punktweise folgt $gf = h \in L_2(\mu)$, und damit $f \in D(M_g)$.

(2) Für $f \in D(M_g)$ und $h \in D(M_{\overline{g}})$ gilt

$$\langle M_g f, h\rangle = \langle gf, h\rangle = \langle f, \overline{g}h\rangle = \langle f, M_{\overline{g}}h\rangle,$$

also $M_{\overline{g}} \subseteq M_g^*$.

Es bleibt $D(M_g^*) \subseteq D(M_{\overline{g}})$ zu zeigen, d. h. für $f \in D(M_g^*)$ müssen wir $\overline{g}f \in L_2(\mu)$ zeigen. Sei dazu $h_n := \overline{g}f\chi_{\Omega_n}$, wegen $\overline{g}^2 f\chi_{\Omega_n} \in L_2(\mu)$ ist dann $h_n \in D(M_{\overline{g}})$, und es gilt

$$\|h_n\|^2 = \int_{\Omega_n} |gf|^2 d\mu = \langle M_{\overline{g}} h_n, f\rangle = \langle h_n, M_g^* f\rangle \leq \|h_n\|\|M_g^* f\|,$$

also $\sup_n \|h_n\| \leq \|M_g^* f\| < \infty$, und somit $\overline{g}f \in L_2(\mu)$. □

Verknüpfungen

Es werden mit H, K und L komplexe Hilberträume bezeichnet.

Definition. *Seien A und B (unbeschränkte) Operatoren von H nach K, so sei $A+B$ definiert als Operator von H nach K mit*

$$D(A+B) := D(A) \cap D(B) \text{ und } (A+B)\xi := A\xi + B\xi \text{ für } \xi \in D(A+B).$$

Ist A ein Operator von K nach L, und B ein Operator von H nach K, so sei AB definiert als Operator von H nach L mit

$$D(AB) := \{\xi \in D(A) \mid A\xi \in D(B)\} \text{ und } (AB)\xi := A(B\xi) \text{ für } \xi \in D(AB).$$

Bemerkung. Für unbeschränkte Operatoren A, B, C zwischen Hilberträumen gilt

$$(A+B)+C = A+(B+C), \quad (AB)C = A(BC)$$
$$(A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) \supseteq AB + AC.$$

Dies verifiziert man leicht durch Betrachtung der jeweiligen Definitionsbereiche.

Aus $A \subseteq A'$ und $B \subseteq B'$ folgt ferner $A+B \subseteq A'+B'$ bzw. $AB \subseteq A'B'$.

Proposition 2.1.4.

(1) *Es seien A, B dicht definierte Operatoren von H nach K, sowie $x \in \mathcal{L}(H,K)$.*
  - (1a) *Ist B abgeschlossen, so ist $x + B$ abgeschlossen.*
  - (1b) *Ist $A+B$ dicht definiert, so gilt $(A+B)^* \supseteq A^* + B^*$.*
  - (1c) *Es gilt $(x+B)^* = x^* + B^*$.*

(2) *Es sei A ein dicht definierter Operator von K nach L und B ein dicht definierter Operator von H nach K, sowie $x \in \mathcal{L}(H,K)$ und $y \in \mathcal{L}(K,L)$.*
  - (2a) *Ist A abgeschlossen, so ist Ay abgeschlossen.*
  - (2b) *Ist AB dicht definiert, so gilt $(AB)^* \supseteq B^*A^*$.*
  - (2c) *Es gilt $(xB)^* = B^*x^*$.*

Beweis. (1a) Sei (ξ_n) eine Folge in $D(x+B) = D(B)$, $\xi \in H$, $\eta \in K$, sowie $\xi_n \longrightarrow \xi$ und $(x+B)\xi_n \longrightarrow \eta$. Dann gilt $x\xi_n \longrightarrow x\xi$ und $B\xi_n = (x+B)\xi_n - x\xi_n \longrightarrow \eta - x\xi$. Da B abgeschlossen ist, folgt $\xi \in D(B) = D(x+B)$ und $B\xi = \eta - x\xi$, so dass $(x+B)\xi = \eta$.

(1b) Sei $\eta \in D(A^* + B^*)$ und $\xi \in D(A+B)$, dann gilt

$$\langle (A+B)\xi, \eta\rangle = \langle A\xi, \eta\rangle + \langle B\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A^*\eta\rangle + \langle \xi, B^*\eta\rangle = \langle \xi, (A^*+B^*)\eta\rangle,$$

also $(\eta, (A^*+B^*)\eta) \in G((A+B)^*)$.

(1c) Wegen $x \in \mathcal{L}(H,K)$ ist

$$\begin{aligned} D((x+B)^*) &= \{\eta \in K \mid \langle (x+B)\cdot, \eta\rangle \text{ ist stetig}\} \\ &= \{\eta \in K \mid \langle B\cdot, \eta\rangle \text{ ist stetig}\} = D(B^*) = D(x^* + B^*), \end{aligned}$$

mit (1b) folgt also (1c).

(2a) Sei (ξ_n) eine Folge in $D(Ay)$, $\xi \in H$, $\eta \in L$, sowie $\xi_n \longrightarrow \xi$ und $Ay\xi_n \longrightarrow \eta$. Dann gilt $y\xi_n \longrightarrow y\xi$. Da A abgeschlossen ist, folgt $y\xi \in D(A)$, also $\xi \in D(Ay)$, und $Ay\xi = \eta$.

(2b) Sei $\eta \in D(B^*A^*)$ und $\xi \in D(AB)$, dann gilt

$$\langle AB\xi, \eta\rangle = \langle B\xi, A^*\eta\rangle = \langle \xi, B^*A^*\eta\rangle,$$

also $(\eta, B^*A^*\eta) \in G((AB)^*)$.

(2c) Es ist

$$\begin{aligned} D((xB)^*) &= \{\eta \in L \mid \langle xB\cdot, \eta\rangle \text{ ist stetig}\} \\ &= \{\eta \in L \mid \langle B\cdot, x^*\eta\rangle \text{ ist stetig}\} = \{\eta \in L \mid x^*\eta \in D(B^*)\} = D(B^*x^*), \end{aligned}$$

mit (2b) folgt also (2c). □

2.2. Selbstadjungiertheit

Für eine Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren werden selbstadjungierte Operatoren benötigt. In diesem Abschnitt werden wir selbstadjungierte Operatoren definieren, sowie einige Aussagen zusammenstellen, die bei der Entwicklung der Spektraltheorie benötigt werden.

Definition. *Ein dicht definierter Operator A auf H heißt* symmetrisch*, falls $A \subseteq A^*$, und* selbstadjungiert*, falls $A = A^*$.*

Bemerkung. Ein dicht definierter Operator A auf H ist genau dann symmetrisch, falls

$$\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A\eta\rangle \text{ für alle } \xi, \eta \in D(A).$$

Lemma 2.2.1. *Es sei A ein dicht definierter, abgeschlossener, symmetrischer Operator auf H. Dann ist $A \pm i\mathbf{1}$ injektiv und* $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1})$ *ist abgeschlossen.*

Beweis. Für $\xi \in D(A)$ ist $\langle A\xi, \xi\rangle = \langle \xi, A\xi\rangle$, also $\langle A\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$, und daher

$$\|(A \pm i\mathbf{1})\xi\|^2 = \|A\xi\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\langle A\xi, i\xi\rangle + \|i\xi\|^2 = \|A\xi\|^2 + \|\xi\|^2 \geq \|\xi\|^2. \qquad (*)$$

Also ist $A \pm i\mathbf{1}$ injektiv, und $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1})$ ist abgeschlossen, weil $A \pm i\mathbf{1}$ abgeschlossen ist. □

Die Unterscheidung zwischen symmetrischen und selbstadjungierten Operatoren ist wichtig, da nur letztere eine Spektralzerlegung zulassen. Um Operatoren als selbstadjungiert nachzuweisen, sind die beiden folgenden Lemmata nützlich.

Lemma 2.2.2. *Es sei A ein dicht definierter, symmetrischer Operator auf H. Dann sind äquivalent:*

(1) *A ist selbstadjungiert.*

(2) *A ist abgeschlossen und* $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1}) \subseteq H$ *ist dicht.*

(3) $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1}) = H$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Ist $A = A^*$, dann ist A nach Proposition 2.1.2, (1), abgeschlossen und es gilt

$$(\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1}))^\perp = \mathrm{Kern}(A \pm i\mathbf{1})^* = \mathrm{Kern}(A \mp i\mathbf{1}) = \{0\},$$

also ist $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1}) \subseteq H$ dicht.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1})$ ist dann nach Lemma 2.2.1 abgeschlossen.

(3) $\Rightarrow$ (1) Wegen $A \subseteq A^*$ bleibt $D(A^*) \subseteq D(A)$ zu zeigen. Sei $\eta \in D(A^*)$, dann existiert nach Voraussetzung $\xi \in D(A)$ mit $(A^* - i\mathbf{1})\eta = (A - i\mathbf{1})\xi$; wegen $A \subseteq A^*$ ist ferner $(A^* - i\mathbf{1})\xi = (A - i\mathbf{1})\xi$. Nach Proposition 2.1.2, (1), ist $\mathrm{Kern}(A^* - i\mathbf{1}) = (\mathrm{Bild}(A + i\mathbf{1}))^\perp = \{0\}$ und somit folgt $\eta = \xi \in D(A)$. □

Lemma 2.2.3. *Es sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine gerichtete Menge von Projektionen und $D_0 := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} e(H) \subseteq H$; weiterhin sei $A_0 : D(A_0) \to H$ ein dicht definierter Operator mit $D(A_0) = D_0$, so dass $A_0 e \in \mathcal{L}(H)_{sa}$ ist, für alle $e \in \mathcal{E}$. Dann ist A_0 abschließbar und $A := \overline{A_0}$ ist selbstadjungiert.*

Beweis. Seien $\xi, \eta \in D_0$. Da $\mathcal{E}$ gerichtet ist, existiert $e \in \mathcal{E}$ mit $\xi, \eta \in e(H)$. Es gilt nun

$$\langle A_0 \xi, \eta \rangle = \langle A_0 e \xi, \eta \rangle = \langle \xi, A_0 e \eta \rangle = \langle \xi, A_0 \eta \rangle,$$

also $\eta \in D(A_0^*)$ und $A_0^* \eta = A_0 \eta$. Damit ist $A_0 \subseteq A_0^*$ und A_0 ist abschließbar. Ferner gilt $A = \overline{A_0} \subseteq \overline{A_0^*} = \overline{A_0}^* = A^*$.

Für alle $e \in \mathcal{E}$ gilt nun $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1})e = e(H)$, da $Ae = A_0 e \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $Ae \pm ie$ damit invertierbar auf $e(H)$ ist. Damit ist $\mathrm{Bild}(A \pm i\mathbf{1}) \supseteq D_0$, also dicht in H, und nach Lemma 2.2.2 folgt, dass A selbstadjungiert ist. □

Proposition 2.2.4. *Ist A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator von H nach K, so ist A^*A ein selbstadjungierter Operator auf H.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass A^*A dicht definiert ist, und dass $\mathrm{Bild}(A^*A + \mathbf{1}) = H$.

Da $G(A) \subseteq H \times K$ abgeschlossen ist, definiert $p : G(A) \to H$, $p(\xi, \eta) = \xi$ einen stetigen, injektiven Operator zwischen Hilberträumen. Dessen Adjungierte $p^* : H \to G(A)$ besitzt dichtes Bild, da $(\mathrm{Bild}\, p^*)^\perp = \mathrm{Kern}\, p^{**} = \mathrm{Kern}\, p = \{0\}$ nach Proposition 2.1.2, (1).

Sei nun $\eta \in H$, $p^*\eta =: (\zeta, A\zeta) \in G(A)$, sowie $\xi \in D(A)$. Dann gilt

$$\langle \eta, \xi \rangle = \langle \eta, p(\xi, A\xi) \rangle = \langle p^*\eta, (\xi, A\xi) \rangle = \langle (\zeta, A\zeta), (\xi, A\xi) \rangle,$$

also $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \zeta \rangle + \langle A\xi, A\zeta \rangle$, d. h. $\langle A\xi, A\zeta \rangle = \langle \xi, \eta - \zeta \rangle$. Damit ist $A\zeta \in D(A^*)$ und $A^*(A\zeta) = \eta - \zeta$, d. h. $(A^*A + \mathbf{1})\zeta = \eta$.

Da $\eta \in H$ beliebig war, folgt $\mathrm{Bild}(A^*A + \mathbf{1}) = H$. Außerdem wurde

$$D_0 := \{\zeta \in H \mid (\zeta, A\zeta) \in \mathrm{Bild}\, p^*\} \subseteq D(A^*A)$$

gezeigt, und da $\mathrm{Bild}\, p^*$ dicht in $G(A)$ ist, ist D_0 dicht in $D(A)$ und somit dicht in H. Somit ist A^*A dicht definiert.

Um zu zeigen, dass A^*A selbstadjungiert ist, beobachten wir zunächst

$$\langle A^*A\xi, \eta \rangle = \langle A\xi, A\eta \rangle = \langle \xi, A^*A\eta \rangle \quad (\xi, \eta \in D(A^*A)),$$

also $A^*A \subseteq (A^*A)^*$, und somit $A^*A + \mathbf{1} \subseteq (A^*A)^* + \mathbf{1} = (A^*A + \mathbf{1})^*$ (nach Proposition 2.1.4, (1c)). Nach Proposition 2.1.2, (1) gilt $\mathrm{Kern}(A^*A + \mathbf{1})^* = (\mathrm{Bild}(A^*A + \mathbf{1}))^\perp = H^\perp = \{0\}$, d. h. $(A^*A + \mathbf{1})^*$ ist injektiv. Deswegen implizieren $A^*A + \mathbf{1} \subseteq (A^*A + \mathbf{1})^*$ und $\mathrm{Bild}(A^*A + \mathbf{1}) = H$ bereits $A^*A + \mathbf{1} = (A^*A + \mathbf{1})^*$, und somit auch $A^*A = (A^*A)^*$, wie gewünscht. $\square$

Bemerkung. Im obigen Beweis ist $G(A|_{D_0}) = \mathrm{Bild}\, p^*$ dicht in $G(A)$ und somit D_0 ein determinierender Bereich für A. Es folgt, dass auch $D(A^*A)$ ein determinierender Bereich für A ist.

2.3. Mit einer von Neumann-Algebra affiliierte Operatoren

Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra. Für einen Operator $x \in \mathcal{L}(H)$ gilt nach dem Bikommutantensatz und Lemma A.2.1

$$x \in \mathcal{M} \text{ genau dann, wenn } u^*xu = x \text{ für alle } u \in \mathcal{M}', u \text{ unitär.}$$

Deshalb definieren für unbeschränkte Operatoren:

Definition. *Ein Operator A auf H heißt* affiliiert *mit einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$, falls*

$$u^*Au = A \text{ für alle } u \in \mathcal{M}', u \text{ unitär.}$$

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathcal{M}}$ die Menge aller abgeschlossenen, dicht definierten Operatoren auf H, die mit $\mathcal{M}$ affiliiert sind. Weiterhin sei $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ die Menge aller selbstadjungierten Operatoren in $\overline{\mathcal{M}}$.

Für die Affiliiertheit mit einer von Neumann-Algebra verwenden wir sehr oft das folgende Kriterium.

Lemma 2.3.1. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra und A ein Operator auf H. Dann ist A genau dann affiliiert mit $\mathcal{M}$, falls*

$$Ax \supseteq xA \text{ für alle } x \in \mathcal{M}'.$$

Beweis. $\Rightarrow$ Sei $x \in \mathcal{M}'$, dann ist $x = \sum_{i=1}^n u_i$ mit $u_i \in \mathcal{M}'$ unitär. Nach der Bemerkung zu Definition 2.1 ist $Ax = A(\sum_{i=1}^n u_i) \supseteq \sum_{i=1}^n Au_i = \sum_{i=1}^n u_i A = (\sum_{i=1}^n u_i)A = xA$.

$\Leftarrow$ Für $u \in \mathcal{M}'$, u unitär, ist $Au \supseteq uA$ und $Au^* \supseteq u^*A$ (also $A \supseteq u^*Au$). Damit ist $uA \supseteq u(u^*Au) = Au$, also $Au = uA$ und damit $u^*Au = A$. □

Lemma 2.3.2. *Es seien A, B mit einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ affiliierte Operatoren auf H. Dann sind auch $A+B$ und AB mit $\mathcal{M}$ affiliiert. Ist A dicht definiert bzw. abschließbar, so ist A^* bzw. der Abschluss $\overline{A}$ mit $\mathcal{M}$ affiliiert.*

Beweis. Für alle $x \in \mathcal{M}'$ gilt

$$(A+B)x = Ax + Bx \supseteq xA + xB = x(A+B),$$
$$ABx = A(Bx) \supseteq A(xB) = (Ax)B \supseteq (xA)B = xAB,$$

also sind $A+B$ und AB mit $\mathcal{M}$ affiliiert. Ist nun A dicht definiert, so gilt nach Proposition 2.1.4, (2c) und (2b)

$$A^*x = (x^*A)^* \supseteq (Ax^*)^* \supseteq xA^*,$$

so dass A^* mit $\mathcal{M}$ affiliiert ist. Ist schließlich A abschließbar und $u \in \mathcal{M}'$, u unitär, so gilt

$$u^*\overline{A}u = \overline{u^*Au} = \overline{A},$$

so dass $\overline{A}$ mit $\mathcal{M}$ affiliiert ist. □

Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{B}(\mu)$ die Menge aller messbaren Funktionen $\Omega \to \mathbb{C}$. Wir betrachten im folgenden Satz die für $g \in \mathcal{B}(\mu)$ definierten Multiplikations-Operatoren M_g auf $L_2(\mu)$ aus Proposition 2.1.3.

Proposition 2.3.3. *Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein σ-endlicher, regulärer Maßraum und $\mathcal{A}$ die von Neumann-Algebra $\{M_g \mid g \in L_\infty(\mu)\} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mu))$ aus Proposition 1.2.2. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{A}} = \{M_g \mid g \in \mathcal{B}(\mu)\}.$$

Beweis. $\supseteq$ Es sei $g \in \mathcal{B}(\mu)$. Nach Proposition 2.1.3 ist M_g ein dicht definierter, abgeschlossener Operator auf $L_2(\mu)$ und nach Lemma 2.3.1 bleibt $M_g x \supseteq xM_g$ für $x \in \mathcal{A}'$ zu zeigen.

Nach Proposition 1.2.2 ist $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, also $x = M_h$ für ein $h \in L_\infty(\mu)$. Für $f \in D(M_g)$ sind dann gf und hgf in $L_2(\mu)$ und es gilt

$$M_h M_g f = hgf = ghf = M_g M_h f,$$

und damit $xM_g = M_h M_g \subseteq M_g M_h = M_g x$, wie gewünscht.

$\subseteq$ Es sei $A \in \overline{M}$. Nach Lemma 2.3.1 gilt $Ax \supseteq xA$, also insbesondere $D(A) \subseteq D(Ax)$, für alle $x \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$.

Wir zeigen zunächst, dass $D_0 := D(A) \cap L_\infty(\mu)$ ein determinierender Bereich für A ist. Sei hierzu $f \in D(A)$ gegeben und $e_n := M\chi_{f^{-1}(B(0,n))} \in \mathcal{A}_{\text{proj}}$, dann ist $e_n f \in D_0$ (wegen $D(A) \subseteq D(Ae_n)$), und es gilt $e_n f \longrightarrow f$ und $Ae_n f = e_n Af \longrightarrow Af$ nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue, wie gewünscht.

Für $f, g \in D_0$ gilt wegen $M_f A \subseteq AM_f$ nun $fAg = M_f Ag = AM_f g = A(fg)$, und wegen $fg = gf$ somit

$$fAg = gAf \text{ für alle } f, g \in D_0. \tag{$*$}$$

Wir konstruieren nun ein $g \in \mathcal{B}(\mu)$, so dass $A = M_g$. Sei hierzu $\Omega = \dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ für alle n. Betrachte für fixiertes n eine Folge $(f_{k,n}) \subseteq D_0$ mit $f_{k,n} \longrightarrow \chi_{\Omega_n}$ und setze

$$\Omega_n^* := \{\omega \in \Omega_n \mid f_{k,n}(\omega) = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt $0 = M_{\chi_{\Omega_n^*}} f_{n,k} \longrightarrow M_{\chi_{\Omega_n^*}} \chi_{\Omega_n} = \chi_{\Omega_n^*}$, also $\mu(\Omega_n^*) = 0$. Wir definieren

$$g(\omega) := \frac{(Af_{k_\omega,n})(\omega)}{f_{k_\omega,n}(\omega)} \text{ für } \omega \in \Omega_n \setminus \Omega_n^*,$$

wobei k_ω so gewählt sei, dass $f_{k_\omega,n}(\omega) \neq 0$. Es ist g f. ü. auf Ω definiert und messbar. Für alle $f \in D_0$ gilt nach $(*)$ $f_{k_\omega,n}(\omega)(Af)(\omega) = f(\omega)(Af_{k_\omega,n})(\omega)$, und damit $(Af)(\omega) = g(\omega)f(\omega)$ f. ü. Dies zeigt $A|_{D_0} \subseteq M_g$ und damit gilt $A = \overline{A|_{D_0}} \subseteq \overline{M_g} = M_g$.

Um $M_g \subseteq A$ zu zeigen, sei $f \in D(M_g)$ gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $\chi_n := \chi_{g^{-1}(B(0,n))}$ und $e_n = M_{\chi_n} \in \mathcal{A}_{\text{proj}}$. Für fixiertes n betrachte eine Folge $(f_{k,n})_k \subseteq D(A)$ mit $f_{k,n} \longrightarrow e_n f$. Somit gilt auch $e_n f_{k,n} \longrightarrow e_n f$ und es ist $e_n f_{k,n} \in D(A)$, weil $D(A) \subseteq D(Ae_n)$. Wegen $A \subseteq M_g$ und der Stetigkeit von $M_{g\chi_n}$ gilt

$$Ae_n f_{k,n} = M_g e_n f_{k,n} = M_{g\chi_n} f_{k,n} \longrightarrow M_{g\chi_n} e_n f = M_g e_n f \text{ für } k \to \infty,$$

also $(e_n f, M_g e_n f) \in \overline{G(A)}$. Wegen $f \in D(M_g)$ gilt $(e_n f, M_g e_n f) \longrightarrow (f, M_g f)$ nach dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz, und es folgt $G(M_g) \subseteq \overline{G(A)} = G(A)$, also $M_g \subseteq A$. □

2.4. Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren

Von selbstadjungierten Operatoren erzeugte von Neumann-Algebren

Im Folgenden werden wir umfassend die mit einer kommutativen von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ affiliierten, abgeschlossenen, dicht definierten Operatoren $\overline{\mathcal{M}}$ behandeln. Dass es jedenfalls für selbstadjungierte Operatoren A eine kommutative von Neumann-Algebra mit $A \in \overline{\mathcal{M}}$ gibt, zeigt der nächste Satz; die dort konstruierte von Neumann-Algebra wollen wir die *von A erzeugte von Neumann-Algebra* nennen. Auch bei *normalen* Operatoren A, d. h. wenn gilt $A^*A = AA^*$, gibt es eine kommutative von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ mit $A \in \overline{\mathcal{M}}$, doch werden wir diese Tatsache nicht benötigen.

Satz 2.4.1. *Ist A ein selbstadjungierter Operator auf H, dann sind $A \pm i\mathbf{1} : D(A) \to H$ bijektive Operatoren. Die inversen Operatoren $x_+ = (A + i\mathbf{1})^{-1}$ und $x_- = (A - i\mathbf{1})^{-1}$ sind beschränkt mit $\|x_\pm\| \leq 1$ und erzeugen eine kommutative von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$. Es ist $\mathcal{M}$ die kleinste von Neumann-Algebra mit der A affiliiert ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.2.1 und Lemma 2.2.2 sind $A \pm i\mathbf{1}$ bijektiv; nach dem Beweis von Lemma 2.2.1 gilt ferner $\|x_\pm\| \leq 1$.

Für $\xi, \eta \in D(A)$ gilt nun

$$\begin{aligned}\langle x_+(A+i\mathbf{1})\xi, (A-i\mathbf{1})\eta\rangle &= \langle \xi, (A-i\mathbf{1})\eta\rangle \\ &= \langle (A+i\mathbf{1})\xi, \eta\rangle = \langle (A+i\mathbf{1})\xi, x_-(A-i\mathbf{1})\eta\rangle,\end{aligned}$$

und wegen $\operatorname{Bild}(A \pm i\mathbf{1}) = H$ folgt $x_+^* = x_-$.

Für $\xi \in D(A)$ mit $A\xi \in D(A)$ gilt weiterhin

$$\eta := (A-i\mathbf{1})(A+i\mathbf{1})\xi = (A^2+\mathbf{1})\xi = (A+i\mathbf{1})(A-i\mathbf{1})\xi,$$

also $x_+x_-\eta = x_-x_+\eta = \xi$, und erneut wegen $\operatorname{Bild}(A \pm i\mathbf{1}) = H$ folgt $x_+x_- = x_-x_+$. Es ist also x_+ normal und $\mathcal{M} := \{x_+, x_-\}''$ eine kommutative von Neumann-Algebra.

Um zu zeigen, dass A mit $\mathcal{M}$ affiliiert ist, benutzen wir Lemma 2.3.1. Sei also $y \in \mathcal{M}'$, dann gilt

$$(A+i\mathbf{1})yx_+ = (A+i\mathbf{1})x_+y = y = y(A+i\mathbf{1})x_+,$$

woraus wegen $\operatorname{Bild} x_+ = D(A) = D(A+i\mathbf{1})$ folgt $(A+i\mathbf{1})y \supseteq y(A+i\mathbf{1})$. Damit gilt $Ay + iy = (A+i\mathbf{1})y \supseteq y(A+i\mathbf{1}) = yA + iy$, also $Ay \supseteq yA$, so dass $A \in \overline{\mathcal{M}}$.

Ist nun $\mathcal{M}_0$ eine weitere von Neumann-Algebra mit $A \in \overline{\mathcal{M}_0}$, so gilt $u^*Au = A$ für alle $u \in \mathcal{M}_0'$, u unitär, also auch $u^*(A \pm i\mathbf{1})u = A \pm i\mathbf{1}$ und somit $u^*x_\pm u = x_\pm$. Damit gilt $\{x_+, x_-\} \subseteq \mathcal{M}_0$, und folglich $\mathcal{M} = \{x_+, x_-\}'' \subseteq \mathcal{M}_0$, wie gewünscht. □

Bemerkung. Sei A selbstadjungiert und $\mathcal{M}$ die von A erzeugte von Neumann-Algebra, und gelte $u^*Au = A$ für ein $u \in \mathcal{L}(H)$ unitär, so gilt $u^*xu = x$ für alle $x \in \mathcal{M}$. Denn $u^*Au = A$ impliziert $u^*x_\pm u = x_\pm$, so dass $\{x_+, x_-\} \subseteq \{u\}'$; folglich gilt $\mathcal{M} = \{x_+, x_-\}'' \subseteq \{u\}''' = \{u\}'$.

Selbstadjungierte Operatoren und selbstadjungierte Funktionen

Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine kommutative von Neumann-Algebra. Dann gibt es einen *-Isomorphismus (die Gelfand-Transformation) $\varphi : \mathcal{M} \to C(X)$, wobei X ein extrem unzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum ist. Wir möchten diesen *-Isomorphismus zunächst auf die Menge $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ aller mit $\mathcal{M}$ affiliierten, selbstadjungierten Operatoren und dann auf die Menge $\overline{\mathcal{M}}$ Operatoren erweitern. Hierfür müssen wir auch die Menge $C(X)$ aller stetigen Funktionen auf X erweitern.

Definition. *Es sei X ein extrem unzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum. Eine Funktion f heißt* normal *auf X, falls $f \in C(X \setminus Z)$, wobei $Z \subseteq X$ abgeschlossen und nirgends dicht ist, und falls $\lim_{p \to q} |f(p)| = \infty$ für alle $q \in Z$. Ist f zusätzlich reellwertig, so heißt f* selbstadjungiert *auf X.*

Es bezeichne $\mathcal{N}(X)$ die Menge aller normalen Funktionen auf X und $\mathcal{S}(X)$ die Menge aller selbstadjungierten Funktionen auf X.

Für Eindeutigkeitsaussagen ist das folgende Lemma hilfreich.

Lemma 2.4.2. *Seien $f, g \in \mathcal{N}(X)$, definiert auf $X \setminus Z_f$ bzw. $X \setminus Z_g$, und sei $S \subseteq X \setminus (Z_f \cup Z_g)$ dicht, so dass $f|_S = g|_S$. Dann ist $Z_f = Z_g$ und $f = g$.*

Beweis. Es ist $X \setminus (Z_f \cup Z_g)$ dicht in X, also ist S dicht in X. Sei $q \in Z_f$ und $(p_\alpha) \subseteq S$ ein Netz mit $p_\alpha \longrightarrow q$, dann ist $|g(p_\alpha)| = |f(p_\alpha)| \longrightarrow \infty$ und somit $q \in Z_g$. Ebenso gilt $Z_g \subseteq Z_f$, also $Z_f = Z_g$. Da f, g stetig auf $X \setminus Z_f = X \setminus Z_g$ sind, folgt $f = g$, aufgrund der Dichtheit von S. □

Im Folgenden sei stets $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $\varphi : \mathcal{M} \to C(X)$ die Gelfand-Transformation.

Konstruktion von $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{S}(X)$. Sei $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ gegeben, dann ist $A \pm i\mathbf{1} : D(A) \to H$ bijektiv und $x_\pm = (A \pm i\mathbf{1})^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ (siehe Satz 2.4.1). Sei $u \in \mathcal{M}'$, u unitär, dann gilt $u^* A u = A$, also $u^*(A \pm i\mathbf{1})u = A \pm i\mathbf{1}$, und damit

$$u x_\pm u^* = u(A \pm i\mathbf{1})^{-1} u^* = (A \pm i\mathbf{1})^{-1} = x_\pm,$$

so dass $x_\pm \in \mathcal{M}$.

Es sei $g_\pm := \varphi(x_\pm) \in C(X)$, dann gilt $g_+ = \overline{g_-}$. Sei nun $Z := \{g_+ = 0\} = \{g_- = 0\}$, sowie

$$h(p) := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g_+} + \frac{1}{g_-}\right)(p) = \left(\frac{g_+ + g_-}{2 g_+ g_-}\right)(p) \text{ für } p \in X \setminus Z.$$

Wir behaupten nun, dass $\widetilde{\varphi}(A) := h$ ein Element in $\mathcal{S}(X)$ definiert. Es ist h reellwertig und stetig auf $X \setminus Z$, ferner ist Z abgeschlossen.

Wir zeigen, dass Z nirgends dicht ist. Angenommen, es existiert $U \neq \emptyset$ offen mit $U \subseteq Z$, dann ist $\overline{U} \subseteq Z$ offen und abgeschlossen, also $\chi_{\overline{U}} \in C(X)$ und $g_+ \chi_{\overline{U}} = 0$. Mit $e := \varphi^{-1}(\chi_{\overline{U}}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ folgt $x_+ e = 0$, obwohl $e \neq 0$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Injektivität von x_+.

Schließlich zeigen wir $\lim_{p \to q} |h(p)| = \infty$ für $q \in Z$. Wegen $x_+ x_- = x_- x_+$ gilt

$$\begin{aligned} A x_+ x_- &= (A - i\mathbf{1} + i\mathbf{1}) x_- x_+ = x_+ + i x_+ x_-, \\ A x_+ x_- &= (A + i\mathbf{1} - i\mathbf{1}) x_+ x_- = x_- - i x_+ x_-, \end{aligned}$$

und damit $A x_+ x_- = \frac{1}{2}(x_+ + x_-)$ und $i x_+ x_- = \frac{1}{2}(x_- - x_+)$. Die erste Gleichung benötigen wir später, und aus der zweiten folgt $i g_+ g_- = \frac{1}{2}(g_- - g_+)$, so dass für $p \in X \setminus Z$ folgt

$$(h + i)(p) = \left(\frac{g_+ + g_- + (g_- - g_+)}{2 g_+ g_-}\right)(p) = \frac{1}{g_+(p)}.$$

Wegen $Z = \{g_+ = 0\}$ ist damit die Behauptung gezeigt.

Satz 2.4.3. *Es ist* $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{S}(X)$ *eine bijektive Abbildung, die* φ *fortsetzt. Ferner gilt:*

(1) *Für* $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ *ist* $\widetilde{\varphi}(A) \in \mathcal{S}(X)$ *das eindeutig bestimmte Element, das* A repräsentiert *in dem Sinne, dass für alle* $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ *mit* $Ae \in \mathcal{M}$ *gilt* $\widetilde{\varphi}(A)\varphi(e) = \varphi(Ae)$.

(2) *Für* $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ *und alle* $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ *mit* $\widetilde{\varphi}(A)\varphi(e) \in C(X)$ *gilt* $Ae \in \mathcal{M}$ *und* $\varphi(Ae) = \widetilde{\varphi}(A)\varphi(e)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst (2) und (1), und dann die Bijektivität von $\widetilde{\varphi}$.

(2) Es sei $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ und $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit $\widetilde{\varphi}(A)\varphi(e) \in C(X)$. Nach Konstruktion ist $h := \widetilde{\varphi}(A)$ definiert auf $X \setminus Z$, wobei $Z = \{g_\pm = 0\}$ und $g_\pm = \varphi(x_\pm) = \varphi((A \pm i\mathbf{1})^{-1})$. Sei $\varphi(e) =: \chi_Y$, wobei $Y \subseteq X$ offen und abgeschlossen ist, dann ist $h\chi_Y = \widetilde{\varphi}(A)\varphi(e) \in C(X)$ und daher $Y \subseteq X \setminus Z$.

Deswegen ist $k := \frac{1}{g_+g_-}\chi_Y \in C(X)$, und es gilt $g_+g_-k = \chi_Y$, so dass mit $y := \varphi^{-1}(k)$ gilt $x_+x_-y = e$. Nach Konstruktion von h ist $\frac{1}{2}(g_+ + g_-)k = h\chi_Y$ und ferner gilt $Ax_+x_- = \frac{1}{2}(x_+ + x_-)$ (vgl. letzten Absatz der Konstruktion von $\widetilde{\varphi}$). So haben wir

$$\varphi^{-1}(h\chi_Y) = \tfrac{1}{2}(x_+ + x_-)y = Ax_+x_-y = Ae,$$

also $Ae \in \mathcal{M}$ und $\varphi(Ae) = h\chi_Y$, wie gewünscht.

(1) Um zu zeigen, dass A durch $h := \widetilde{\varphi}(A)$ repräsentiert wird, sei $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit $Ae \in \mathcal{M}$. Dann ist auch $(A + i\mathbf{1})e \in \mathcal{M}$, sowie $e(H) \subseteq D(A)$ und $x_+(A + i\mathbf{1})e = e$. Daher ist

$$g_+\varphi((A + i\mathbf{1})e) = \varphi(x_+(A + i\mathbf{1})e) = \varphi(e) =: \chi_Y,$$

und daher $Y \subseteq \{g_+ \neq 0\} = X \setminus Z$. Es ist also $\widetilde{\varphi}(A)\varphi(e) = h\chi_Y \in C(X)$ und nach (2) gilt $\varphi(Ae) = \widetilde{\varphi}(A)\varphi(e)$.

Wir haben damit auch gezeigt, dass $\widetilde{\varphi}$ eine Fortsetzung von φ ist.

Für die Eindeutigkeitsaussage bei (1) und die Bijektivität von $\widetilde{\varphi}$ sind ein paar Vorbereitungen notwendig.

Ist ein Element $h \in \mathcal{S}(X)$ definiert auf $X \setminus Z$, so bezeichne $\mathcal{Y}_h$ die Menge aller offenen und abgeschlossenen Mengen $Y \subseteq X \setminus Z$ und $\mathcal{E}_h$ die Menge der entsprechenden Projektionen $e_Y := \varphi^{-1}(\chi_Y)$ $(Y \in \mathcal{Y}_h)$.

Es gilt $\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_h} Y = X \setminus Z$. Denn ist $p \in X \setminus Z$ gegeben, so existiert eine offene Umgebung $O(p) \subseteq X \setminus Z$. Da X ein kompakter Hausdorffraum ist, existiert eine offene Umgebung $O_0(p)$ mit $\overline{O_0(p)} \subseteq O(p) \subseteq X \setminus Z$, und da X extrem unzusammenhängend ist, gilt $\overline{O_0(p)} \in \mathcal{Y}_h$.

Weiterhin gilt $\bigvee_{e \in \mathcal{E}_h} e = \mathbf{1}$; denn sei $f := \bigvee_{e \in \mathcal{E}_h} e$ und $\varphi(f) = \chi_T$, dann gilt $T \supseteq \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_h} Y = X \setminus Z$, also (da T abgeschlossen ist) $T = X$ und $f = \mathbf{1}$.

Es ist $(e_Y)_{Y \in \mathcal{Y}_h} = (e)_{e \in \mathcal{E}_h}$ ein monoton steigendes Netz, also folgt nach Satz 1.1.2 $e_Y \longrightarrow \mathbf{1}$ in starker Operator-Topologie, also $e_Y\xi \longrightarrow \xi$ für alle $\xi \in H$.

Demnach ist $D_0 := \bigcup_{e \in \mathcal{E}_h} e(H)$ ein determinierender Bereich für alle $A \in \widetilde{M}_{\mathrm{sa}}$. Denn ist $\xi \in D(A)$, dann gilt $e_Y\xi \longrightarrow \xi$ und $Ae_Y\xi = e_YA\xi \longrightarrow A\xi$ (beachte $e_Y \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$). Wegen $(e_Y\xi)_{Y \in \mathcal{Y}_h} \subseteq D_0$ folgt die Behauptung.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit bei (1). Dazu nehmen wir an, dass A durch h und $\widetilde{h}$ $(h, \widetilde{h} \in \mathcal{S}(X))$ repräsentiert werden. Für alle $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit $Ae \in \mathcal{M}$ ist dann $h\varphi(e) = \varphi(Ae) = \widetilde{h}\varphi(e)$. Dies gilt insbesondere für alle $e = \varphi^{-1}(\chi_Y)$, wobei $Y \in \mathcal{Y}_h$, nach (2). Also gilt $h = \widetilde{h}$ auf $\bigcup_{Y \in \mathcal{Y}_h} Y = X \setminus Z$. Nach Lemma 2.4.2 gilt $h = \widetilde{h}$.

Um zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}$ injektiv ist, seien $A, B \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ mit $\widetilde{\varphi}(A) = \widetilde{\varphi}(B) = h$. Für $Y \in \mathcal{Y}_h$ ist dann $h\chi_Y \in C(X)$, also $Ae = \varphi^{-1}(h\chi_Y) = Be$ mit $e = \varphi^{-1}(\chi_Y) \in \mathcal{E}_h$, nach (2). Da $\bigcup_{e \in \mathcal{E}_h} e(H)$ ein determinierender Bereich für A und B ist, folgt $A = B$.

Wir zeigen nun, dass $\widetilde{\varphi}$ surjektiv ist. Sei $h \in \mathcal{S}(X)$ gegeben. Für $Y \in \mathcal{Y}_h$ ist $h\chi_Y \in C(X)$ und wir definieren $x_Y := \varphi^{-1}(h\chi_Y)$.

Auf $D_0 := \bigcup_{e \in \mathcal{E}_h} e(H) \subseteq H$ wird nun ein Operator A_0 auf H definiert, und zwar durch $A_0\xi := x_Y\xi$ für alle $\xi \in e_Y(H)$. Es ist A_0 wohldefiniert, denn sei $\xi \in e_Y(H) \cap e_{Y'}(H)$, also $\xi \in e_{Y\cap Y'}(H)$, dann ist $h\chi_Y\chi_{Y\cap Y'} = h\chi_{Y'}\chi_{Y\cap Y'}$, also

$$x_Y\xi = x_Y e_{Y\cap Y'}\xi = x_{Y'}e_{Y\cap Y'}\xi = x_{Y'}\xi.$$

Nach Lemma 2.2.3 ist A_0 abschließbar und $A := \overline{A_0}$ ist selbstadjungiert. Um zu beweisen, dass A mit $\mathcal{M}$ affiliiert ist, zeigen wir zuerst $xA|_{D_0} \subseteq Ax$ für alle $x \in \mathcal{M}'$. Sei hierfür $\xi \in e(H)$ mit $e \in \mathcal{E}_h$ gegeben, dann gilt $Ae = x_Y \in \mathcal{M}$, also

$$xA\xi = x(Ae)\xi = (Ae)x\xi = A(ex)\xi = A(xe)\xi = Ax\xi.$$

Da D_0 für A und so auch für xA ein determinierender Bereich ist, folgt $xA = \overline{xA|_{D_0}} \subseteq \overline{Ax} = Ax$, denn Ax ist nach Proposition 2.1.4, (2a) abgeschlossen. Also ist A affiliiert mit $\mathcal{M}$.

Wir zeigen nun $\widetilde{h} := \varphi(A) = h$. Sei $Y \in \mathcal{Y}_h$, dann ist $Ae_Y = x_Y = \varphi^{-1}(h\chi_Y) \in \mathcal{M}$, und nach (1) gilt $\widetilde{h}\chi_Y = \varphi(Ae_Y) = h\chi_Y$, also ist $h = \widetilde{h}$ auf $\bigcup_{Y\in\mathcal{Y}_h} Y = X \setminus Z$, und damit $h = \widetilde{h}$, nach Lemma 2.4.2. □

Selbstadjungierte Funktionen und Spektralscharen

Definition. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra. Eine* Spektralschar *ist eine Familie $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$, so dass*

- $e_\lambda \leq e_\mu$ *für* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \leq \mu$,
- $\bigwedge_{\lambda\in\mathbb{R}} e_\lambda = 0$ *und* $\bigvee_{\lambda\in\mathbb{R}} e_\lambda = \mathbf{1}$,
- $e_\lambda = \bigwedge_{\mu>\lambda} e_\mu$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $\varphi : \mathcal{M} \to C(X)$ die Gelfand-Transformation. Wir werden nun eine Abbildung ψ von $\mathcal{S}(X)$ in die Spektralscharen von $\mathcal{M}$ konstruieren, um mit ψ und der Abbildung $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{S}(X)$ aus Satz 2.4.3 jedem selbstadjungierten Operator $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ eine Spektralschar $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} := \psi(\widetilde{\varphi}(A))$ zuzuordnen.

Wir formulieren zunächst ein Lemma über selbstadjungierte Funktionen.

Lemma 2.4.4. *Sei $f \in \mathcal{S}(X)$ definiert auf $X \setminus Z$ und $Z_\pm := \{q \in Z \mid \lim_{p\to q} f(p) = \pm\infty\}$. Dann ist $Z = Z_+ \dot{\cup} Z_-$ und f ist stetig als Funktion $X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.*

Beweis. Für die erste Aussage ist $Z \subseteq Z_+ \cup Z_-$ zu zeigen. Dazu sei angenommen, es existiert $p \in Z$ mit $p \notin Z_+ \cup Z_-$. Sei $U_\pm := \{p \in X \setminus Z \mid \pm f(p) > 0\}$, dann ist $p \in \overline{U_+} \cap \overline{U_-}$. Nun sind U_+ und U_- offen in $X \setminus Z$, also in X, und ferner disjunkt. Damit gilt $U_+ \subseteq X \setminus U_-$, also $\overline{U_+} \subseteq X \setminus U_-$, und da $\overline{U_+}$ offen ist weiter

$$\overline{U_+} = (\overline{U_+})^0 \subseteq (X \setminus U_-)^0 = X \setminus \overline{U_-},$$

also $\overline{U_+} \cap \overline{U_-} = \emptyset$, ein Widerspruch.

Für die fortgesetzte Funktion $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt nun für alle $q \in X$ und alle Netze (p_α) mit $p_\alpha \longrightarrow q$, dass $f(p_\alpha) \longrightarrow f(q)$. Also ist f stetig. □

Konstruktion von $\psi : \mathcal{S}(X) \to \{Spektralscharen\}$. Sei $h \in \mathcal{S}(X)$ gegeben und definiert auf $X \setminus Z$. Wir betrachten h gemäß Lemma 2.4.4 als stetige Funktion $X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und definieren zu allen $\lambda \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$U_\lambda := \{h > \lambda\} \subseteq X \text{ und } X_\lambda := X \setminus \overline{U_\lambda}.$$

Wir zeigen, dass X_λ die größte offene und abgeschlossene Menge ist mit $X_\lambda \subseteq \{h \leq \lambda\}$. Zunächst ist X_λ wie $\overline{U_\lambda}$ offen und abgeschlossen, und es gilt $X_\lambda \subseteq \{h \leq \lambda\}$. Ist $Y \subseteq \{h \leq \lambda\}$ offen und abgeschlossen, so gilt $Y \subseteq X \setminus U_\lambda$, also $Y = Y^0 \subseteq X \setminus \overline{U_\lambda} = X_\lambda$.

Wir definieren $\psi(h) := \{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$, wobei $e_\lambda := \varphi^{-1}(\chi_{X_\lambda}) \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$, und zeigen, dass $\{e_\lambda\}$ eine Spektralschar ist.

Für $\lambda \leq \mu$ ist zunächst $X_\lambda \subseteq X_\mu$, also $e_\lambda \leq e_\mu$.

Wir zeigen nun $e_\lambda = \bigwedge_{\mu > \lambda} e_\mu$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Sicherlich ist $f := \bigwedge_{\mu > \lambda} e_\mu \geq e_\lambda$. Mit $\chi_Y := \varphi(f)$ gilt nun

$$Y \subseteq \cap_{\mu > \lambda} X_\mu \subseteq \cap_{\mu > \lambda}\{h \leq \mu\} = \{h \leq \lambda\},$$

und somit $Y \subseteq X_\lambda$, weil X_λ die größte offene und abgeschlossene Menge mit dieser Eigenschaft ist. Also gilt $f \leq e_\lambda$ und somit $f = e_\lambda$.

Weiterhin gilt $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = 0$. Denn mit $\chi_S := \varphi(\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda)$ ist

$$S \subseteq \cap_{\lambda \in \mathbb{R}} X_\lambda \subseteq \cap_{\lambda \in \mathbb{R}}\{h \leq \lambda\} = Z_-,$$

also $S = \emptyset$, da S offen ist.

Schließlich gilt $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = \mathbf{1}$. Denn mit $\chi_T := \varphi(\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda)$ ist

$$T \supseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} X_\lambda \supseteq \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{h < \lambda\} = X \setminus Z_+,$$

also $T = X$, da T abgeschlossen ist.

Lemma 2.4.5. *Die Abbildung ψ bildet $\mathcal{S}(X)$ bijektiv auf die Menge der Spektralscharen von $\mathcal{M}$ ab.*

Beweis. Wir zeigen, dass ψ injektiv ist. Seien $h, \widetilde{h} \in \mathcal{S}(X)$ mit $\psi(h) = \psi(\widetilde{h}) = \{e_\lambda\}$. Nach Konstruktion müssen dann die Mengen $\overline{U_\lambda} = \overline{\{h > \lambda\}} = \overline{\{\widetilde{h} > \lambda\}}$ gleich sein. Es folgt $\{\widetilde{h} > \lambda\} \subseteq \{h \geq \lambda\}$ und $\{h > \lambda\} \subseteq \{\widetilde{h} \geq \lambda\}$, damit sieht man leicht $h = \widetilde{h}$.

Um zu zeigen, dass ψ surjektiv ist, sei eine Spektralschar $\{e_\lambda\}$ gegeben und seien $X_\lambda \subseteq X$ definiert durch $\chi_{X_\lambda} := \varphi(e_\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Wir setzen

$$h(p) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid p \in X_\lambda\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \text{ für } p \in X$$

und zeigen, dass $h \in \mathcal{S}(X)$ und $\psi(h) = \{e_\lambda\}$.

Sei $Z_- := \cap_{\lambda \in \mathbb{R}} X_\lambda$ und $Z_+ := X \setminus (\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} X_\lambda)$, dann sind Z_- und Z_+ abgeschlossen und $h(p) \in \mathbb{R}$ für $p \in X \setminus Z$, wobei $Z := Z_+ \cup Z_-$.

Wegen $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = 0$ und $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = \mathbf{1}$ sind Z_- und Z_+ nirgends dicht. Denn gäbe es eine offene Menge U mit $\emptyset \neq U \subseteq Z_-$, so wäre $\overline{U}$ offen und abgeschlossen mit $\overline{U} \subseteq Z_-$, also $0 \neq \varphi^{-1}(\chi_{\overline{U}}) \leq \bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda$, ein Widerspruch. Analog argumentiert man für Z_+.

Die Stetigkeit von h auf X folgt leicht aus der Offenheit und Abgeschlossenheit der Mengen X_λ. Denn sei etwa $q \in X \backslash Z$, $\lambda_0 := h(q) \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$, dann gilt $|h(p)-h(q)| \leq \epsilon$ für alle $p \in X_{\lambda_0+\epsilon} \backslash X_{\lambda_0-\epsilon}$. Ist dagegen $q \in Z_-$ und $M < 0$, so ist $q \in X_M$ und so $h(p) \leq M$ für alle $p \in X_M$. Ähnliches gilt für $q \in Z_+$.

Also ist $h \in \mathcal{S}(X)$ und wir müssen $\{f_\lambda\} := \psi(h) = \{e_\lambda\}$ zeigen. Sei $Y_\lambda \subseteq X$ definiert durch $\chi_{Y_\lambda} := \varphi(f_\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), dann ist nach Konstruktion Y_λ die größte offene und abgeschlossene Menge mit $Y_\lambda \subseteq \{h \leq \lambda\}$. Aufgrund $X_\lambda \subseteq \{h \leq \lambda\}$ folgt $X_\lambda \subseteq Y_\lambda$, also $e_\lambda \leq f_\lambda$. Wegen $Y_\lambda \subseteq \{h \leq \lambda\} \subseteq \cap_{\mu > \lambda} X_\mu$ ist außerdem $f_\lambda \leq \bigwedge_{\mu>\lambda} e_\mu = e_\lambda$, also $e_\lambda = f_\lambda$ wie gewünscht. □

Lemma 2.4.6. *Für jedes $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ ist $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} := \psi(\widetilde{\varphi}(A))$ die* Spektralschar *zu A, d. h. mit $f_n := e_n - e_{-n}$ ist $D_0 := \bigcup_{n=1}^\infty f_n(H)$ ein determinierender Bereich für A und*

$$A\xi = \int_{-n}^{n} \lambda d(e_\lambda \xi) \text{ für alle } \xi \in f_n(H)$$

im Sinne von Normkonvergenz approximierender Riemannsummen.

Eine Spektralschar ist für höchstens einen Operator $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ die Spektralschar zu A.

Beweis. Da $\{e_\lambda\}$ eine Spektralschar ist, folgt $\bigvee_{n=1}^\infty f_n = \mathbf{1}$. Für alle $\xi \in D(A)$ gilt damit $f_n\xi \longrightarrow \xi$ und $Af_n\xi = f_nA\xi \longrightarrow A\xi$ (beachte $f_n \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$), so dass D_0 ein determinierender Bereich für A ist.

Es sei $h := \widetilde{\varphi}(A)$, sowie X_λ definiert durch $\chi_{X_\lambda} := \varphi(e_\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun eine Zerlegung $-n = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k = n$ der Feinheit $\delta > 0$ gegeben, sowie $\alpha_j \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ beliebig gewählt. Betrachte nun $g := \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{X_{\lambda_j} \backslash X_{\lambda_{j-1}}}$, dann gilt $\|g - h\chi_{X_n \backslash X_{-n}}\| \leq \delta$. Denn sei $p \in X_n \setminus X_{-n}$, dann ist $p \in X_{\lambda_j} \setminus X_{\lambda_{j-1}}$ für ein j, d. h. $g(p) = \alpha_j$ und $h(p) \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$, also $|g(p) - h(p)| \leq \delta$.

Nun ist $\varphi(Af_n) = h\chi_{X_n \backslash X_{-n}}$, wegen Satz 2.4.3, (2), also folgt $\| \sum_{j=1}^k \alpha_j(e_{\lambda_j} - e_{\lambda_{j-1}}) - Af_n\| \leq \delta$, also $A\xi = Af_n\xi = \int_{-n}^n \lambda d(e_\lambda\xi)$ für alle $\xi \in f_n(H)$.

Die letzte Aussage folgt, weil A durch eine Spektralschar auf dem determinierenden Bereich D_0 festgelegt wird. □

Wir fassen unsere Ergebnisse im folgenden Satz zusammen.

Satz 2.4.7 (Spektralresolution)**.** *Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra.*

(1) *Zu jedem Operator $A \in \overline{M}_{\mathrm{sa}}$ existiert genau eine Spektralschar $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ mit den Eigenschaften*
   - *$D_0 := \bigcup_{n=1}^\infty f_n(H)$ ist ein determinierender Bereich für A,*
   - *$A\xi = \int_{-n}^n \lambda d(e_\lambda\xi)$ für alle $\xi \in f_n(H)$ im Sinne von Normkonvergenz approximierender Riemannsummen;*

   hierbei ist $f_n := e_n - e_{-n}$.

(2) *Zu jeder Spektralschar $\{e_\lambda\}$ gibt es umgekehrt genau einen Operator $A \in \overline{M}_{\mathrm{sa}}$, für den diese beiden Eigenschaften gelten.*

Beweis. Nach Satz 2.4.3 und Lemma 2.4.5 ist die Abbildung $\psi \circ \widetilde{\varphi}$ von $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ auf die Spektralscharen von $\mathcal{M}$ bijektiv. Weiterhin erfüllt nach Lemma 2.4.6 für $A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ die Spektralschar $\{e_\lambda\} = \psi(\widetilde{\varphi}(A))$ die beiden Eigenschaften. Hieraus folgen die Existenzaussagen bei (1) und (2) und es bleibt die jeweilige Eindeutigkeit zu zeigen.

(2) Die Eindeutigkeit folgt aus der letzten Aussage von Lemma 2.4.6.

(1) Angenommen auch $\{f_\lambda\}$ erfüllt die beiden Eigenschaften, dann gibt es ein $B \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ mit $\psi(\widetilde{\varphi}(B)) = \{f_\lambda\}$ und wegen der Eindeutigkeitsaussage bei (2) muss $A = B$ und somit $\{f_\lambda\} = \psi(\widetilde{\varphi}(A)) = \{e_\lambda\}$ sein. □

Bemerkung. Es sei $u : H \to K$ eine surjektive Isometrie zwischen Hilberträumen H und K, sowie A ein selbstadjungierter Operator auf K. Ist $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar zu A, so ist $\{u^* e_\lambda u\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar des selbstadjungierten Operators u^*Au auf H.

Denn mit $f_n := e_n - e_{-n}$ ist $\bigcup_{n=1}^\infty u^* f_n u(H)$ ein determinierender Bereich für u^*Au und für alle $\xi \in u^* f_n u(H) = u^* f_n(K)$ gilt $u\xi \in f_n(K)$ und damit

$$u^*Au\xi = u^* \int_{-n}^{n} \lambda de_\lambda(u\xi) = \int_{-n}^{n} \lambda du^* e_\lambda u\xi.$$

2.5. Mit einer kommutativen von Neumann-Algebra affiliierte Operatoren

Die *-Algebra $\overline{\mathcal{M}}$

Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra. Wir werden zeigen, wie die Menge $\overline{\mathcal{M}}$ aller abgeschlossenen, dicht definierten, mit $\mathcal{M}$ affiliierten Operatoren als *-Algebra angesehen werden kann.

Hierzu sei bemerkt, dass aus $A, B \in \overline{\mathcal{M}}$ zwar folgt, dass $A + B$ und AB mit $\mathcal{M}$ affiliiert sind, wir wissen jedoch nicht, ob die Operatoren $A + B$ bzw. AB dicht definiert und abgeschlossen sind. Bald werden wir jedoch zeigen, dass $A+B$ und AB dicht definiert und abschließbar sind, wobei sich das folgende Lemma, welches die Spetraltheorie des letzten Abschnitts benutzt, als hilfreich erweist.

Lemma 2.5.1. *Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine kommutative von Neumann-Algebra. Dann besitzt jede Menge $\{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq \overline{\mathcal{M}}$ eine gemeinsame* beschränkende Folge $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$, *d. h. (e_n) ist monoton wachsend mit $\bigvee_{n=1}^\infty e_n = \mathbf{1}$ und $A_k e_n \in \mathcal{M}$ für alle k und n.*

Ferner ist $D_0 := \bigcup_{n=1}^\infty e_n(H)$ ein determinierender Bereich für alle A_k.

Beweis. Wir zeigen die erste Aussage per Induktion über m.

Es sei $m = 1$ und $A := A_1 \in \overline{\mathcal{M}}$. Nach Proposition 2.2.4 ist A^*A selbstadjungiert und damit $A^*A \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$. Sei $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ die Spektralschar zu A^*A und $f_n := e_n - e_{-n}$, so dass $\bigvee_{n=1}^\infty f_n = \mathbf{1}$. Für alle n ist $A^*Af_n \in \mathcal{M}$ (siehe etwa Satz 2.4.3, (2)), also ist Af_n überall definiert und nach Proposition 2.1.4, (2a), abgeschlossen. Weil Af_n mit $\mathcal{M}$ affiliiert ist folgt $Af_n \in \mathcal{M}$, und (f_n) ist eine beschränkende Folge für A.

Wir nehmen nun an, (e_n) sei eine beschränkende Folge für $\{A_1, \ldots, A_{m-1}\}$ und (f_n) eine beschränkende Folge für A_m. Dann ist $(e_n f_n)$ eine beschränkende Folge für $\{A_1, \ldots, A_m\}$.

Für die zweite Aussage sei zunächst bemerkt, dass $\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n = \mathbf{1}$ impliziert $e_n\xi \longrightarrow \xi$ für alle $\xi \in H$, nach Proposition 1.4.2. Sei nun $\xi \in D(A_k)$, dann gilt $e_n\xi \longrightarrow \xi$ und $A_k e_n \xi = e_n A_k \xi \longrightarrow A_k\xi$ (beachte $A_k e_n \supseteq e_n A_k$). Wegen $(e_n\xi) \subseteq D_0$ ist damit die Aussage gezeigt. □

Satz 2.5.2. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $A, B \in \overline{\mathcal{M}}$. Dann gilt:*

(1) *$A + B$, AB sind dicht definierte, abschließbare Operatoren auf H,*

(2) *die Abschlüsse $A \mathbin{\widehat{+}} B$, $A \mathbin{\widehat{\cdot}} B$ von $A + B$ bzw. AB sind in $\overline{\mathcal{M}}$,*

(3) *$A \mathbin{\widehat{\cdot}} B = B \mathbin{\widehat{\cdot}} A$, $A^*A = AA^* = A^* \mathbin{\widehat{\cdot}} A$,*

(4) *$(\alpha A \mathbin{\widehat{+}} B)^* = \overline{\alpha} A^* \mathbin{\widehat{+}} B^*$,*

(5) *$(A \mathbin{\widehat{\cdot}} B)^* = B^* \mathbin{\widehat{\cdot}} A^*$,*

(6) *$A \subseteq B$ impliziert $A = B$.*

(7) *Mit den Operationen $\widehat{+}$ und $\widehat{\cdot}$ wird $\overline{\mathcal{M}}$ zu einer kommutativen *-Algebra.*

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass mit $A, B \in \overline{\mathcal{M}}$ auch $A^*, B^* \in \overline{\mathcal{M}}$.

(1) Nach Lemma 2.5.1 existiert ein determinierender Bereich D_0 für A, B bzw. A^*, B^*. Damit sind $A+B$ und A^*+B^* dicht definiert. Nach Proposition 2.1.4, (1b) gilt $(A+B)^* \supseteq A^*+B^*$, also ist $(A+B)^*$ dicht definiert und $A+B$ abschließbar, nach Proposition 2.1.2, (2).

Nach Lemma 2.5.1 existiert eine beschränkende Folge $(e_n) \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ für A, B, A^* und B^*. Dann ist (wegen $Be_n \supseteq e_n B$)

$$ABe_n = A(Be_n)e_n \supseteq A(e_nB)e_n \in \mathcal{M},$$

also $ABe_n \in \mathcal{M}$ und (e_n) ist beschränkend für AB. Es folgt, dass AB dicht definiert ist, und analog, dass B^*A^* dicht definiert ist. Wegen $(AB)^* \supseteq B^*A^*$ (siehe Proposition 2.1.4, (2b)) ist $(AB)^*$ dicht definiert und AB somit abschließbar.

(2) Dies folgt sofort aus (1) und Lemma 2.3.2.

(3) Es sei $(e_n) \subseteq \mathcal{M}$ eine beschränkende Folge für A und B. Dann ist $ABe_n = Ae_nBe_n = Be_nAe_n = BAe_n$, und man folgert $A \mathbin{\widehat{\cdot}} B = B \mathbin{\widehat{\cdot}} A$. Weil A^*A und AA^* bereits abgeschlossen sind, gilt $A^*A = A^* \mathbin{\widehat{\cdot}} A = A \mathbin{\widehat{\cdot}} A^* = AA^*$.

(4), (5) Als Vorbemerkung, wenn $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit $Ae, A^*e \in \mathcal{M}$, dann gilt sowohl $(Ae)^* \supseteq eA^*$ nach Proposition 2.1.4, (2b), als auch $A^*e \supseteq eA^*$ nach Lemma 2.3.1. Also ist $(Ae)^* = A^*e$.

Nun sei $(e_n) \subseteq \mathcal{M}$ eine beschränkende Folge für A, A^*, B, B^*, $\alpha A \mathbin{\widehat{+}} B$, $(\alpha A \mathbin{\widehat{+}} B)^*$, sowie für $A \mathbin{\widehat{\cdot}} B$, $(A \mathbin{\widehat{\cdot}} B)^*$, $B^* \mathbin{\widehat{\cdot}} A^*$. Dann ist

$$(\overline{\alpha}A^* \mathbin{\widehat{+}} B^*)e_n = \overline{\alpha}A^*e_n \mathbin{\widehat{+}} B^*e_n = \overline{\alpha}(Ae_n)^* \mathbin{\widehat{+}} (Be_n)^* = ((\alpha A \mathbin{\widehat{+}} B)e_n)^* = (\alpha A \mathbin{\widehat{+}} B)^*e_n,$$
$$(A \mathbin{\widehat{\cdot}} B)^*e_n = ((A \mathbin{\widehat{\cdot}} B)e_n)^* = (Ae_nBe_n)^* = (Be_n)^*(Ae_n)^* = B^*e_nA^*e_n = (B^* \mathbin{\widehat{\cdot}} A^*)e_n,$$

und so folgen (4) und (5).

(6) Sei D_0 ein determinierender Bereich für A und B, dann ist $A|_{D_0} = B|_{D_0}$, also folgt $A = B$.

(7) Verbleibende Gesetze wie $(A \mathbin{\widehat{\cdot}} B) \mathbin{\widehat{\cdot}} C = A \mathbin{\widehat{\cdot}} (B \mathbin{\widehat{\cdot}} C)$ prüft man leicht nach, indem man nach Lemma 2.5.1 beschränkende Folgen für alle beteiligten Operatoren konstruiert. □

Affiliierte Operatoren und normale Funktionen

Im Folgenden sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $\varphi : \mathcal{M} \to C(X)$ die Gelfand-Transformation; es ist φ ein *-Isomorphismus und X ein extrem unzusammenhängender, kompakter Hausdorff-Raum. Im Satz 2.4.3 haben wir φ bereits zu einer Bijektion $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{S}(X)$ von der Menge der mit $\mathcal{M}$ affiliierten, selbstadjungierten Operatoren auf die Menge der selbstadjungierten Funktionen fortgesetzt. Nun wollen wir $\widetilde{\varphi}$ zu einer Bijektion $\overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}(X)$ von der Menge aller abgeschlossenen, dicht definierten, mit $\mathcal{M}$ affiliierten Operatoren auf die Menge der normalen Funktionen erweitern.

Zunächst sei bemerkt, dass für $f, g \in \mathcal{N}(X)$ durch $f + g$ und fg stetige Funktionen auf der offenen, dichten Menge $X \setminus (Z_f \cup Z_g)$ definiert werden (wobei f auf $X \setminus Z_f$ und g auf $X \setminus Z_g$ definiert sei), die jedoch nicht normal zu sein brauchen.

Satz 2.5.3. *Es existiert eine bijektive Fortsetzung $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}(X)$ von φ mit der Eigenschaft: Für alle $A \in \overline{\mathcal{M}}$ ist $\widetilde{\varphi}(A)$ das eindeutige Element in $\mathcal{N}(X)$, das A repräsentiert, d. h.*

$$\text{für alle } e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}} \text{ mit } Ae \in \mathcal{M} \text{ ist } \varphi(Ae) = \widetilde{\varphi}(A)\varphi(e).$$

Die kommutative *-Algebra-Struktur auf $\overline{\mathcal{M}}$ induziert via $\widetilde{\varphi}$ eine kommutative *-Algebra-Struktur auf $\mathcal{N}(X)$ mit Verknüpfungen $\widehat{+} : (f, g) \mapsto f \mathbin{\widehat{+}} g$, $\widehat{\cdot} : (f, g) \mapsto f \mathbin{\widehat{\cdot}} g$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$, $f \mapsto \overline{f}$ $(f, g \in \mathcal{N}(X),\ \lambda \in \mathbb{C})$, und hierbei sind $f \mathbin{\widehat{+}} g$ bzw. $f \mathbin{\widehat{\cdot}} g$ normale Fortsetzungen von $f + g$ bzw. fg.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{S}(X)$ aus Satz 2.4.3 und konstruieren die Fortsetzung (erneut $\widetilde{\varphi}$ genannt) auf $\overline{\mathcal{M}}$. Hierzu sei $A \in \overline{\mathcal{M}}$ gegeben, dann ist $A = A_1 \mathbin{\widehat{+}} iA_2$, wobei $A_1 := \frac{1}{2}(A \mathbin{\widehat{+}} A^*)$ und $A_2 := \frac{1}{2i}(A \mathbin{\widehat{+}} (-A^*))$, also $A_1, A_2 \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$. Wir definieren nun $\widetilde{\varphi}(A) := \widetilde{\varphi}(A_1) + i\widetilde{\varphi}(A_2)$. Da $\widetilde{\varphi}(A_1), \widetilde{\varphi}(A_2) \in \mathcal{S}(X)$, sieht man leicht, dass $\widetilde{\varphi}(A) \in \mathcal{N}(X)$.

Um zu zeigen, dass $\widetilde{\varphi}(A)$ eine Repräsentation von A ist, sei $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit $x := Ae \in \mathcal{M}$. Dann ist $x = A_1 e \mathbin{\widehat{+}} iA_2 e \in \mathcal{M}$ und $A_1 e, A_2 e \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$. Es folgt leicht $\|(A_1 e)\xi\|^2 \leq \|x^* x\| \|\xi\|^2$ für alle $\xi \in D(A_1 e)$, und da $A_1 e$ dicht definiert und abgeschlossen ist, folgt $A_1 e \in \mathcal{L}(H)$. Also ist $A_1 e \in \mathcal{M}$ und analog $A_2 e \in \mathcal{M}$. Es folgt nach Satz 2.4.3, (1)

$$\varphi(Ae) = \varphi(A_1 e) + i\varphi(A_2 e) = \widetilde{\varphi}(A_1)\varphi(e) + i\widetilde{\varphi}(A_2)\varphi(e) = \widetilde{\varphi}(A)\varphi(e).$$

Um die Eindeutigkeit der Repräsentation zu zeigen, sei angenommen, dass $A \in \overline{\mathcal{M}}$ durch $h \in \mathcal{N}(X)$ repräsentiert wird. Ist $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ eine beschränkende Folge (siehe Lemma 2.5.1) für A, dann gilt $h\varphi(e_n) = \varphi(Ae) = \widetilde{\varphi}(A)\varphi(e_n)$. Sei $\chi_{X_n} := \varphi(e_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so stimmen also h und $\widetilde{\varphi}(A)$ auf der Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq X$ überein, die wegen $\bigvee_{n=1}^{\infty} e_n = \mathbf{1}$ dicht ist. Nach Lemma 2.4.2 ist $h = \widetilde{\varphi}(A)$.

Wir zeigen nun, dass $\widetilde{\varphi}$ injektiv ist. Dazu seien $A, B \in \overline{\mathcal{M}}$ gegeben mit $\widetilde{\varphi}(A) = \widetilde{\varphi}(B) = h$, sowie (e_n) eine beschränkende Folge für A, B. Dann gilt $\varphi(Ae_n) = h\varphi(e_n) = \varphi(Be_n)$, also $A|_{D_0} = B|_{D_0}$, wobei $D_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n(H)$ ein determinierender Bereich für A und B ist; es folgt $A = B$.

Bevor wir zur Surjektivität kommen, betrachten wir die Bijektion $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{S}(X)$ und induzieren hiermit zunächst Verknüpfungen auf $\mathcal{S}(X)$. Um diese zu beschreiben, seien $f, g \in \mathcal{S}(X)$ gegeben, $A := \widetilde{\varphi}^{-1}(f)$, $B := \widetilde{\varphi}^{-1}(g)$, so dass $f \mathbin{\widehat{+}} g := \widetilde{\varphi}(A \mathbin{\widehat{+}} B)$. Sei nun $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ eine beschränkende Folge für A, B, dann ist $(A \mathbin{\widehat{+}} B)e_n = Ae_n + Be_n$, also nach Satz 2.4.3, (1)

$$\widetilde{\varphi}(A \mathbin{\widehat{+}} B)\varphi(e_n) = \varphi((A \mathbin{\widehat{+}} B)e_n) = \varphi(Ae_n) + \varphi(Be_n) = (\widetilde{\varphi}(A) + \widetilde{\varphi}(B))\varphi(e_n),$$

also $(f \mathbin{\widehat{+}} g)\chi_{X_n} = (f + g)\chi_{X_n}$, wobei $\chi_{X_n} := \varphi(e_n)$. Somit stimmen $f \mathbin{\widehat{+}} g$ und $f + g$ auf der dichten Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq X$ überein. Da $f + g$ stetig auf $X \setminus (Z_f \cup Z_g)$ ist und $f \mathbin{\widehat{+}} g$ normal ist folgt, für alle $p \in X \setminus (Z_f \cup Z_g)$ ist $f \mathbin{\widehat{+}} g$ definiert und $(f \mathbin{\widehat{+}} g)(p) = (f + g)(p)$. Also ist $f \mathbin{\widehat{+}} g$ eine Fortsetzung von $f + g$.

Unter Benutzung von $(A \mathbin{\widehat{\cdot}} B)e_n = A(Be_n)e_n = Ae_nBe_n$ folgt analog, dass auch $f \mathbin{\widehat{\cdot}} g$ eine Fortsetzung von fg ist.

Wir zeigen jetzt die Surjektivität von $\widetilde{\varphi}$. Sei $h \in \mathcal{N}(X)$ gegeben und definiert auf $X \setminus Z$, dann konstruieren wir zunächst Fortsetzungen $h_1, h_2 \in \mathcal{S}(X)$ von $\operatorname{Re} h$ und $\operatorname{Im} h$. Man sieht leicht, dass $\{h = 0\} \subseteq X$ abgeschlossen ist, damit ist $\{h = 0\}^0$ offen und abgeschlossen. Wir definieren

$$g(p) = \begin{cases} \frac{h}{|h|} & \text{für } p \in X \setminus (Z \cup \{h = 0\}) \\ 1 & \text{für } p \in \{h = 0\}^0, \end{cases}$$

eine bis auf eine nirgends dichte Menge definierte, beschränkte, stetige Funktion auf X. Aus Lemma 1.6.1, (2), folgt, dass g eine Fortsetzung $\widetilde{g} \in C(X)$ besitzt; hierfür gilt dann $\widetilde{g}|h| = h$ auf $X \setminus Z$. Mit der Verknüpfung $\widehat{\cdot}$ auf $\mathcal{S}(X)$ definieren wir nun $h_1 := (\operatorname{Re} \widetilde{g}) \mathbin{\widehat{\cdot}} |h|$, $h_2 := (\operatorname{Im} \widetilde{g}) \mathbin{\widehat{\cdot}} |h|$, und dann folgt $h = h_1 + ih_2$ mit $h_1, h_2 \in \mathcal{S}(X)$. Mit $A_1 := \widetilde{\varphi}^{-1}(h_1)$ und $A_2 := \widetilde{\varphi}^{-1}(h_2)$ und $A := A_1 \mathbin{\widehat{+}} iA_2 \in \overline{\mathcal{M}}$ gilt dann $\widetilde{\varphi}(A) = h$ und die Surjektivität ist gezeigt.

Die Eigenschaften der durch $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}(X)$ induzierten Verknüpfungen $\widehat{+}$ und $\widehat{\cdot}$ auf $\mathcal{N}(X)$ lassen sich nun genauso zeigen wie im Fall $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{S}(X)$. Unter Benutzung einer beschränkenden Folge $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ für A und A^* zeigt man weiterhin leicht $\widetilde{\varphi}(\lambda A) = \lambda\widetilde{\varphi}(A)$ und $\widetilde{\varphi}(A^*) = \overline{\widetilde{\varphi}(A)}$, also ist $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ die induzierte Skalarmultiplikation und $f \mapsto \overline{f}$ die induzierte Involution. $\square$

Das Spektrum

Definition. *Es sei A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf H. Das* Spektrum *von A ist*

$$\operatorname{Sp} A := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\mathbf{1} - A : D(A) \to H \textit{ nicht bijektiv}\}.$$

Bemerkung. Es sei $\lambda \notin \operatorname{Sp} A$. Dann ist $(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, denn $(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}$ ist überall definiert und abgeschlossen.

Ist A affiliiert mit einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$, so ist $x := (\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} \in \mathcal{M}$, denn für alle $u \in \mathcal{M}'$, u unitär, ist $u^*(\lambda\mathbf{1} - A)u = \lambda\mathbf{1} - A$ und somit $u^*xu = x$.

Ist $\mathcal{M}$ kommutativ, so ist $(\lambda\mathbf{1} - A) \widehat{\cdot}\, x = x \widehat{\cdot}\, (\lambda\mathbf{1} - A) = \mathbf{1}$, d. h. x ist das Inverse zu $\lambda\mathbf{1} - A$ in der *-Algebra $\overline{\mathcal{M}}$.

Lemma 2.5.4. *Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}(X)$ der *-Isomorphismus von Satz 2.5.3. Es sei $A \in \overline{\mathcal{M}}$ und $\widetilde{\varphi}(A)$ definiert auf $X \setminus Z$, dann gilt*

$$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Bild} \widetilde{\varphi}(A) = \widetilde{\varphi}(A)(X \setminus Z).$$

Beweis. Es ist $\lambda \notin \operatorname{Sp} A$ genau dann, wenn zu $\lambda\mathbf{1} - A \in \overline{\mathcal{M}}$ eine Inverse $x \in \mathcal{M}$ existiert. Dies ist äquivalent dazu, dass zu $\lambda\mathbf{1} - \widetilde{\varphi}(A) \in \mathcal{N}(X)$ eine Inverse $g \in C(X)$ existiert, und schließlich äquivalent zu $\lambda \notin \operatorname{Bild} \widetilde{\varphi}(A)$ (denn eine normale Funktion besitzt genau dann eine Inverse in $C(X)$, wenn sie nullstellenfrei ist). $\square$

Folgerungen. (1) Ist $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $A \in \overline{\mathcal{M}}$, so gilt

$$A \in \mathcal{M} \text{ genau dann, wenn } \operatorname{Sp} A \text{ beschränkt.}$$

Denn wegen $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Bild} \widetilde{\varphi}(A)$ ist die Beschränktheit von $\operatorname{Sp} A$ äquivalent zur Beschränktheit von $\widetilde{\varphi}(A)$. Da $\widetilde{\varphi}(A)$ normal ist, ist dies äquivalent zu $\widetilde{\varphi}(A) \in C(X)$ und somit zu $A \in \mathcal{M}$.

(2) Ist A ein selbstadjungierter Operator auf H, so gilt $\operatorname{Sp} A \subseteq \mathbb{R}$. Denn sei $\mathcal{M}$ die von A erzeugte kommutative von Neumann-Algebra, dann gilt $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Bild} \widetilde{\varphi}(A)$ und weil $\widetilde{\varphi}(A) \in \mathcal{S}(X)$ reellwertig ist, folgt die Behauptung.

Lemma 2.5.5. *Für ein selbstadjungiertes Element A auf H gilt*

$$\operatorname{Sp} A \subseteq [0, \infty) \textit{ genau dann, wenn } \langle A\xi, \xi \rangle \geq 0 \textit{ für alle } \xi \in D(A);$$

in diesem Fall heißt A positiv*, und wir schreiben $A \geq 0$.*

Beweis. Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ die von A erzeugte, kommutative von Neumann-Algebra und $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}(X)$ der *-Isomorphismus aus Satz 2.5.3. Es sei $h := \widetilde{\varphi}(A) \in \mathcal{S}(X)$, dann ist $\operatorname{Sp} A \subseteq [0, \infty)$ äquivalent zu $h \geq 0$, gemäß Lemma 2.5.4.

„$\Rightarrow$" Ist $h \geq 0$, so ist $g := \sqrt{h} \in \mathcal{S}(X)$, $g \geq 0$, also $g^2 = h$. Mit $B := \widetilde{\varphi}^{-1}(g)$ ist dann $B^2 = B \widehat{\cdot}\, B = A$. Für alle $\xi \in D(A) \subseteq D(B)$ folgt somit $\langle A\xi, \xi \rangle = \langle B\xi, B\xi \rangle \geq 0$.

„$\Leftarrow$" (Kontraposition) Ist h definiert auf $X \setminus Z$ und gilt nicht $h \geq 0$, so existiert $U \subseteq X \setminus Z$ offen und abgeschlossen, so dass $h|_U \leq \lambda_0 < 0$. Mit $e := \widetilde{\varphi}^{-1}(\chi_U) \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ ist $h\chi_U \in C(X)$, so dass $Ae \in \mathcal{M}$ und $\varphi(Ae) = h\chi_U$ gilt. Es folgt $Ae \leq \lambda_0 e$ und für $\xi \in e(H)$, $\|\xi\| = 1$, gilt somit $\langle A\xi, \xi \rangle \leq \lambda_0 < 0$. $\square$

Definition. *Es seien A und B teilweise geordnete Mengen. Eine Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt* σ-normal*, falls für alle monoton wachsenden Folgen $(a_n) \subseteq A$ mit $\sup_n a_n \in A$ gilt $\varphi(\sup_n a_n) = \sup_n \varphi(a_n)$.*

Bemerkung. Die Komposition zweier σ-normaler Abbildungen ist wieder σ-normal. Eine bijektive Abbildung $\varphi : A \to B$, für die φ und φ^{-1} ordnungserhaltend ist, ist σ-normal.

Es sei $\overline{\mathcal{M}}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}(X)$ der *-Isomorphismus aus Satz 2.5.3. Auf der Menge $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{sa}}$ definieren wir eine Ordnung durch $A \leq B$, falls $B \mathbin{\widehat{+}} (-A) \geq 0$. Entsprechend definieren wir auf $\mathcal{S}(X)$ eine Ordnung durch $f \leq g$, falls $g \mathbin{\widehat{+}} (-f) \geq 0$; dies gilt genau dann, falls $f(p) \leq g(p)$ für alle $p \in X \setminus (Z_f \cup Z_g)$, wobei f auf $X \setminus Z_f$ und g auf $X \setminus Z_g$ definiert sei.

Bemerkung. Die Abbildungen $\widetilde{\varphi}$ und $\widetilde{\varphi}^{-1}$ aus Satz 2.5.3 sind ordnungserhaltend und damit σ-normal. Denn $A \geq 0$ ist äquivalent zu $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Bild} \widetilde{\varphi}(A) \subseteq [0, \infty)$, d. h. zu $\widetilde{\varphi}(A) \geq 0$.

2.6. Der Borel'sche Funktionenkalkül

Messbare Funktionen und normale Funktionen

Wir erinnern an Lemma 1.6.1, welches wir nun ergänzen.

Lemma 2.6.1. *Es sei X ein extrem unzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum.*

(1) *Für $g \in \mathcal{B}(X)$ existiert genau eine Funktion $f \in \mathcal{N}(X)$, so dass $g = f$ außerhalb einer mageren Menge.*

(2) *Die durch (1) definierte Abbildung $\alpha : \mathcal{B}(X) \to \mathcal{N}(X)$, $g \mapsto f$ ist ein σ-normaler *-Homomorphismus.*

Beweis. (1) Es sei $g \in \mathcal{B}(X)$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $S_n := \{|g| \leq n\} \subseteq X$. Nach Lemma 1.6.1 exisitert Y_n offen und abgeschlossen mit $S_n \triangle Y_n$ mager, und es existiert zu $g_n := g\chi_{S_n} \in \mathcal{B}_\infty(X)$ ein $f_n \in C(X)$, so dass $g_n = f_n$ außerhalb einer mageren Menge Z_n.

Auf $Y := \bigcup_{n=1}^\infty Y_n$ definieren wir nun f durch $f(p) := f_n(p)$, falls $p \in Y_n$. Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, sei $p \in Y_m \cap Y_n$, wobei $m \leq n$; dann ist $f_n\chi_{Y_m} \in C(X)$ und $f_n\chi_{Y_m} = g_m$ außerhalb einer mageren Menge, so dass wegen der Eindeutigkeit $f_n\chi_{Y_m} = f_m$ gelten muss; damit ist $f_n(p) = (f_n\chi_{Y_m})(p) = f_m(p)$.

Es ist f stetig auf Y und $Z := X \setminus Y$ ist abgeschlossen. Wegen $\bigcup_{n=1}^\infty S_n = X$ ist $X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty Y_n$ eine magere Menge; Z ist also mager und abgeschlossen und damit nirgends dicht. Ist nun $q \in Z$ und $n \in \mathbb{N}$, so ist $U := X \setminus Y_n$ eine offene Umgebung von q und es ist $|f(p)| = |g(p)| \geq n$ für alle $p \in U$, bis auf eine magere Menge; aufgrund der Stetigkeit von f folgt damit $|f| \geq n$ auf U. Es folgt $\lim_{p \to q} |f(p)| = \infty$ und $f \in \mathcal{N}(X)$.

Nach Konstruktion ist $f = g$ außerhalb einer mageren Menge, damit ist die Existenz gezeigt. Die Eindeutigkeit folgt wie bei Lemma 1.6.1, (2), hier unter Benutzung von Lemma 2.4.2.

(2) Wie in Lemma 1.6.1, (3) zeigt man, dass α ein *-Homomorphismus ist.

Weiterhin ist α ordnungserhaltend, d. h. für reelle Funktionen $g_1, g_2 \in \mathcal{B}(X)$ mit $g_1 \leq g_2$ gilt $f_1 := \alpha(g_1) \leq \alpha(g_2) =: f_2$. Ansonsten wäre $f_1 > f_2$ auf einer offenen Menge $\emptyset \neq U \subseteq X$, im Widerspruch dazu dass $f_1 = g_1$ und $f_2 = g_2$, jeweils außerhalb einer mageren Menge.

Zum Beweis der σ-Normalität sei nun (g_n) eine Folge reeller Funktionen in $\mathcal{B}(X)$ mit $g_n \nearrow g$, wobei $g \in \mathcal{B}(X)$; mit $f_n := \alpha(g_n) \in \mathcal{S}(X)$ und $f := \alpha(g) \in \mathcal{S}(X)$ ist $f = \sup_n f_n$ zu zeigen. Es ist $f_n \leq f$ für alle n, also $\sup_n f_n \leq f$. Sei nun $h \in \mathcal{S}(X)$ und $h \geq f_n$ für alle n; da $(g_n(p)) = (f_n(p))$ für alle p außerhalb einer mageren Menge, folgt $h \geq g$ und damit $h \geq f$, jeweils außerhalb einer mageren Menge. Da h und f stetig sind, folgt $h \geq f$ und damit $f = \sup_n f_n$. □

Der Borel'sche Funktionenkalkül

Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $\widetilde{\varphi} : \overline{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}(X)$ der *-Isomorphismus von Satz 2.5.3. Gegeben sei $A \in \overline{\mathcal{M}}$, und $\widetilde{\varphi}(A) \in \mathcal{N}(X)$ sei definiert auf $X \setminus Z$; nach Lemma 2.5.4 ist $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Bild} \widetilde{\varphi}(A)$. Wir betrachten die folgende Kette von Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\operatorname{Sp} A) \to \mathcal{B}(X) &\xrightarrow{\alpha} \mathcal{N}(X) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}^{-1}} \overline{\mathcal{M}} \\ g \mapsto (g \circ \widetilde{\varphi}(A))^- =: \widetilde{g} &\mapsto f \mapsto \widetilde{\varphi}^{-1}(f) =: g(A), \end{aligned}$$

hierbei ist $(g \circ \widetilde{\varphi}(A))^-$ die triviale Fortsetzung der auf $X \setminus Z$ definierten Funktion $g \circ \widetilde{\varphi}(A)$ auf X, sowie α die Abbildung aus Lemma 2.6.1.

Die Verkettung dieser Abbildungen ergibt einen σ-normalen *-Homomorphismus $\mathcal{B}(\operatorname{Sp} A) \to \overline{\mathcal{M}}$, den wir durch Vorschalten der Abbildung $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\operatorname{Sp} A)$, $g \mapsto g|_{\operatorname{Sp} A}$ auch als σ-normalen *-Homomorphismus $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \overline{\mathcal{M}}$ betrachten können.

Satz 2.6.2 (Borel'scher Funktionenkalkül)**.** *Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $A \in \overline{\mathcal{M}}$. Dann gibt es genau einen σ-normalen *-Homomorphismus*

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \overline{\mathcal{M}}, g \mapsto g(A) \text{ mit } z \mapsto A,$$

wobei z die Identitätsabbildung auf $\mathbb{C}$ sei.

Bemerkung. Jeder *-Homomorphismus $\psi : \mathcal{B}(\Omega) \to \overline{\mathcal{M}}$ (Ω ein Messraum) ist ordnungserhaltend, bildet $\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ in $\mathcal{M}$ ab und ist dort normverkleinernd.

Denn ist $g \in \mathcal{B}(\Omega)$, $g \geq 0$, so existiert $h \in \mathcal{B}(\Omega)$, $h \geq 0$ mit $h^2 = g$, also ist $\psi(g) = \psi(h)^2 \geq 0$. Ist nun $0 \leq g \in \mathcal{B}_\infty(\Omega)$, $g \leq M$, so ist $0 \leq \psi(g) \leq M\mathbf{1}$, also $\operatorname{Sp} \psi(g) \subseteq [0, M]$ und somit $\psi(g) \in \mathcal{M}$. Wegen der Linearität folgt, dass $\mathcal{B}_\infty(\Omega)$ in $\mathcal{M}$ abbildet und dort als *-Homomorphismus zwischen C^*-Algebren normverkleinernd ist.

Beweis. Existenz. Die Abbildungen $g \mapsto \widetilde{g}$, α und $\widetilde{\varphi}^{-1}$ sind allesamt σ-normale *-Homomorphismen, und somit ist auch deren Verkettung $g \mapsto g(A)$ ein σ-normaler *-Homomorphismus. Ferner ist $\alpha(\widetilde{z}) = \widetilde{\varphi}(A)$, also $z \mapsto A$.

Eindeutigkeit. Es sei $\psi : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \overline{\mathcal{M}}$ ein σ-normaler *-Homomorphismus mit $\psi(z) = A$.

Fall 1. Wir zeigen die Eindeutigkeit im Fall $x := A \in \mathcal{M}$.

Wie im Beweis von Satz 1.6.2 gilt $\psi(\chi_{\mathbb{C} \setminus D}) = 0$, wobei $D := \overline{B}(0, 2\|x\|)$, und wir betrachten wieder die Abbildung

$$\psi_0 : \mathcal{B}(D) \to \overline{\mathcal{M}}, \ \psi_0(g|_D) := \psi(g)(= \psi(g\chi_D)) \quad (g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})).$$

Wie dort gilt nun $\psi_0(g) = g(x)$ für alle $g \in \mathcal{B}_\infty(D)$. Wegen der σ-Normalität folgert man dies nun für alle $g \in \mathcal{B}(D)$, $g \geq 0$, so dass wegen der Linearität schließlich $\psi_0(g) = g(x)$ für alle $g \in \mathcal{B}(D)$ gilt.

Es folgt somit $\psi(g) = \psi_0(g|_D) = g(x)$ für alle $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Fall 2. Wir betrachten nun $A \in \overline{\mathcal{M}}$.

Sei $e \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ mit $Ae \in \mathcal{M}$ und $K := e(H)$. Wir zeigen, dass für alle $B \in \overline{\mathcal{M}}$ durch $B|_K$ ein Operator in $\widetilde{\mathcal{M}e}$ definiert wird. Wegen $Be \supseteq eB$ folgt $B\xi = Be\xi = eB\xi$, also $B\xi \in K$, für alle $\xi \in K \cap D(B)$; ferner ist $B|_K$ abgeschlossen, sowie dicht definiert, denn ist $\xi \in K$ und $(\xi_n) \subseteq D(B)$ mit $\xi_n \longrightarrow \xi$, so folgt $(e\xi_n) \subseteq D(B) \cap K$ und $e\xi_n \longrightarrow e\xi = \xi$. Sei nun $x \in (\mathcal{M}e)' = \mathcal{M}'e$, also $x = y|_K$ mit $y \in \mathcal{M}'$, dann ist $By \supseteq yB$ und es folgt $B|_K x \supseteq xB|_K$; damit ist $B|_K \in \widetilde{\mathcal{M}e}$ gezeigt.

Die Abbildung $\overline{\mathcal{M}} \to \widetilde{\mathcal{M}e}$, $B \mapsto B|_K$, ist ein σ-normaler *-Homomorphismus, und somit ist $\psi_e : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \widetilde{\mathcal{M}e}$, $g \mapsto \psi(g)|_K$ ein σ-normaler *-Homomorphismus mit $z \mapsto A|_K =: x \in \mathcal{M}e$, ebenso wie $g \mapsto g(A)|_K$. Nach Fall 1 gilt somit $\psi(g)|_K = g(x) = g(A)|_K$ für alle $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Nach Lemma 2.5.1 existiert eine beschränkende Folge $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ für A, $\psi(g)$ und $g(A)$. Dann ist nach Obigem $\psi(g)|_{D_0} = g(A)|_{D_0}$, wobei $D_0 := \bigcup_{n=1}^\infty e_n(H)$ ein determinierender Bereich für $\psi(g)$ und $g(A)$ ist. Also folgt $\psi(g) = g(A)$, wie gewünscht, und die Eindeutigkeit ist gezeigt. □

Wir stellen nachfolgend einige Eigenschaften des Borel'schen Funktionenkalküls zusammen. Um einen Begriff zu klären, sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra. Unter einem *projektionswertigen Maß* verstehen wir eine Abbildung $\mathcal{A} \to \mathcal{M}_{\text{proj}}$, $S \mapsto e(S)$ mit $e(\emptyset) = 0$, $e(\Omega) = \mathbf{1}$, so dass für alle Folgen $(S_n) \subseteq \mathcal{A}$ disjunkter Mengen $e(\bigcup_{n=1}^\infty S_n) = \sum_{n=1}^\infty e_n(S_n)$ (starke Operator-Konvergenz) gilt.

Proposition 2.6.3. *Für den Funktionenkalkül $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \overline{\mathcal{M}}$, $g \mapsto g(A)$ aus Satz 2.6.2 gilt:*

(1) $S \mapsto e(S) := \chi_S(A)$ *($S \subseteq \mathbb{C}$ messbare Menge) definiert ein* projektionswertiges Maß *auf* $\mathbb{C}$,

(2) *für $\xi \in H$ ist $\mu_\xi : S \mapsto \langle e(S)\xi, \xi\rangle$ ein endliches Maß, und für jedes $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ ist $D(g(A)) = \{\xi \in H \mid \int_\mathbb{C} |g(\lambda)|^2 d\mu_\xi(\lambda)(= \|g(A)\xi\|^2) < \infty\}$ und*

$$\langle g(A)\xi, \xi\rangle = \int_\mathbb{C} g(\lambda) d\mu_\xi(\lambda) \text{ für alle } \xi \in D(g(A)). \tag{$*$}$$

(3) *Ist A selbstadjungiert und $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar zu A, dann ist $D(g(A)) = \{\xi \in H \mid \int_\mathbb{R} |g(\lambda)|^2 d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle(= \|g(A)\xi\|^2) < \infty\}$, und*

$$\langle g(A)\xi, \xi\rangle = \int_\mathbb{R} g(\lambda) d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle \text{ für alle } \xi \in D(g(A)).$$

Beweis. (1) Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ eine messbare Menge, dann ist $\chi_S \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C})$ eine Projektion, also auch $e(S) \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$, weil der Borel'sche Funktionenkalkül ein *-Homomorphismus ist. Ferner gilt $e(\emptyset) = \chi_\emptyset(A) = 0$ und $e(\mathbb{C}) = \chi_\mathbb{C}(A) = \mathbf{1}$.

Sei (S_n) eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen und $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, sowie $g_n := \chi_{S_1 \cup \cdots \cup S_n}$ und $g := \chi_S$. Dann ist $g_n \nearrow g$, also gilt wegen der σ-Normalität des Borel'schen Funktionenkalküls $e(S) = g(A) = \sup_n g_n(A) = \sup_n(\sum_{k=1}^{n} e(S_k)) = \sum_{n=1}^{\infty} e(S_n)$.

(2) Wegen (1) ist μ_ξ ein endliches Maß.

Fall 1. Es sei $g \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C})$, dann ist $D(g(A)) = H$ und es bleibt $(*)$ zu zeigen. Im Fall $g = \chi_S$ ($S \subseteq \mathbb{C}$ messbare Menge) gilt

$$\langle g(A)\xi, \xi\rangle = \mu_\xi(S) = \int_{\mathbb{C}} \chi_S(\lambda) d\mu_\xi(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} g(\lambda) d\mu_\xi(\lambda),$$

es folgt, dass $(*)$ für Treppenfunktionen $g = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{S_k}$ ($\lambda_k \in \mathbb{C}$, S_k messbare Mengen) gilt. Sei nun $g \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C})$ gegeben, so existiert eine Folge (g_n) von Treppenfunktionen mit $\|g_n - g\|_\infty \longrightarrow 0$. Da der Borel'sche Funktionenkalkül normverkleinernd ist, folgt $g_n(A) \longrightarrow g(A)$ und somit $(*)$ für g.

Fall 2. Ist nun $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ gegeben, so sei $S_n := \{|g| \leq n\}$, $g_n := g\chi_{S_n} \in \mathcal{B}_\infty(X)$, sowie $e_n := e(S_n) \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $g_n(A) = g(A)e_n \supseteq e_n g(A)$, sowie $e_n\xi \longrightarrow \xi$ für alle $\xi \in H$ (wegen $\bigvee_n e_n = \mathbf{1}$), ferner gilt nach Fall 1

$$\int_{\mathbb{C}} |g_n(\lambda)|^2 d\mu_\xi(\lambda) = \langle |g_n^2|(A)\xi, \xi\rangle = \langle g_n(A)\xi, g_n(A)\xi\rangle = \|g_n(A)\xi\|^2.$$

Sei $\xi \in D(g(A))$, dann gilt $g_n(A)\xi = e_n g(A)\xi \longrightarrow g(A)\xi$ und somit (nach Beppo Levi)

$$\int_{\mathbb{C}} |g(\lambda)|^2 d\mu_\xi(\lambda) = \lim_n \int_{\mathbb{C}} |g_n(\lambda)|^2 d\mu_\xi(\lambda) = \lim_n \|g_n(A)\xi\|^2 = \|g(A)\xi\|^2 < \infty.$$

Sei umgekehrt $\xi \in H$ mit $\int_{\mathbb{C}} |g(\lambda)|^2 d\mu_\xi(A) < \infty$. Wegen $\|g_n(A)\xi - g_m(A)\xi\|^2 = \int_{S_n \setminus S_m} |g(\lambda)|^2 d\mu_\xi(\lambda)$ für $m \leq n$ folgt, dass $(g_n(A)\xi) = (g(A)e_n\xi)$ eine Cauchy-Folge ist. Da aber nun $e_n\xi \longrightarrow \xi$ und $g(A)$ abgeschlossen ist, folgt $\xi \in D(g(A))$.

Um $(*)$ zu zeigen, sei $\xi \in D(g(A))$, und somit $g_n(A)\xi \longrightarrow g(A)\xi$. Es folgt nach Fall 1

$$\langle g(A)\xi, \xi\rangle = \lim_n \langle g_n(A)\xi, \xi\rangle = \lim_n \int_{\mathbb{C}} g_n(\lambda) d\mu_\xi(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} g(\lambda) d\mu_\xi(\lambda),$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen $g \in L_2(\mu_\xi) \subseteq L_1(\mu_\xi)$ und dem Konvergenzsatz nach Lebesgue zulässig ist.

(3) Es sei $h := \widetilde{\varphi}(A) \in \mathcal{S}(X)$, $S := (\lambda, \infty)$ und $g := \chi_S$, dann ist $\widetilde{g} = \chi_{U_\lambda}$, wobei $U_\lambda := \{h > \lambda\}$ offen ist und offenen Abschluss $\overline{U_\lambda}$ hat. Es folgt $f := \varphi(e(S)) = \alpha(\widetilde{g}) = \chi_{\overline{U_\lambda}}$ und damit $e_\lambda = \varphi^{-1}(\chi_{X \setminus \overline{U_\lambda}}) = 1 - e(S)$ (siehe Konstruktion der Spektralschar, vor Lemma 2.4.5). Daher ist $\langle (e_\mu - e_\lambda)\xi, \xi\rangle = \langle e((\lambda, \mu])\xi, \xi\rangle = \mu_\xi((\lambda, \mu])$ für alle $\lambda \leq \mu$, und somit folgt (3) aus (2). □

Proposition 2.6.4. *Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra und $A \in \overline{\mathcal{M}}$. Dann gilt*

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) \text{ für alle } f, g \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Beweis. Wörtlich wie Proposition 1.6.3. □

Bemerkung. Für jeden positiven Operator A existiert ein eindeutig bestimmter positiver Operator B mit $B^2 = A$ (hierfür schreiben wir dann $A^{1/2} := B$).

Dazu betrachten wir die Funktionen $f, g \in \mathcal{B}([0,\infty))$, $f(\lambda) := \sqrt{\lambda}$ und $g(\lambda) := \lambda^2$, so dass $f^2 = z$ und $f \circ g = z$, wobei z wie vorher die Identität sei; dann ist $B := f(A)$ (beachte $\operatorname{Sp} A \subseteq [0,\infty)$) ein positiver Operator mit $B^2 = A$. Ist C ein positiver Operator mit $C^2 = A$, so folgt $C = (f \circ g)(C) = f(g(C)) = f(C^2) = f(A) = B$.

Lemma 2.6.5. *Es sei $\mathcal{M}$ eine kommutative von Neumann-Algebra, $A \in \overline{\mathcal{M}}$, sowie $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ und $K := e(H)$. Dann gilt*

$$g(A|_K) = g(A)|_K \text{ für alle } g \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Beweis. Nach dem Beweis von Satz 2.6.2 (Eindeutigkeit, Fall 2) ist die Abbildung $\overline{\mathcal{M}} \to \overline{\mathcal{M}e}$, $B \mapsto B|_K$ ein σ-normaler *-Homomorphismus. Damit ist die Abbildung $\mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \overline{\mathcal{M}e}$, $g \mapsto g(A)|_K$ ein σ-normaler *-Homomorphismus mit $z \mapsto A|_K$, ebenso wie die Abbildung $g \mapsto g(A|_K)$. Damit folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit des Borel'schen Funktionenkalküls. □

Lemma 2.6.6. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine kommutative von Neumann-Algebra, $A \in \overline{\mathcal{M}}$, und $\xi \in D(A)$ mit $A\xi = \lambda\xi$. Dann gilt*

$$g(A)\xi = g(\lambda)\xi \text{ für alle } g \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Beweis. Es sei o. E. $\xi \neq 0$ angenommen. Die Projektion e auf $K := \overline{\mathcal{M}'\xi}$ ist dann in $\mathcal{M}$. Ist $\eta \in \mathcal{M}'\xi$, $\eta = x\xi$ mit $x \in \mathcal{M}'$, so gilt $A\eta = Ax\xi = xA\xi = x(\lambda\xi) = \lambda\eta$, so dass $A\eta = \lambda\eta$ für alle $\eta \in K$ (denn $\{\eta \in D(A) \mid A\eta = \lambda\eta\}$ ist abgeschlossen, weil A abgeschlossen ist). Nach dem obigen Lemma gilt nun

$$g(A)|_K = g(A|_K) = g(\lambda \mathbf{1}_K) = g(\lambda)\mathbf{1}_K,$$

wegen $\xi \in K$ also $g(A)\xi = g(\lambda)\xi$, wie gewünscht. □

Komplexe Potenzen von Operatoren

Wir betrachten im Folgenden einen positven Operator A auf H, d. h. A ist selbstadjungiert und $\operatorname{Sp} A \subseteq [0,\infty)$.

Nach Satz 2.4.1 existiert eine kommutative von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ mit $A \in \overline{\mathcal{M}}$, wir können somit den Borel'schen Funktionenkalkül (siehe Satz 2.6.2) betrachten. Für $z \in \mathbb{C}$ definiere die Funktion

$$f_z(\lambda) = \begin{cases} \lambda^z := e^{z \log \lambda} & \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(hier bezeichnet log den Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}$); dann definiere

$$A^z := f_z(A) \in \overline{\mathcal{M}}.$$

Wegen $f_1|_{\operatorname{Sp} A} = z|_{\operatorname{Sp} A}$ gilt $A^1 = A$. Weiterhin ist $f_z \cdot f_{z'} = f_{z+z'}$ für alle $z, z' \in \mathbb{C}$; es folgt

$$A^z \hat{\cdot} A^{z'} = A^{z+z'},$$

da $g \mapsto g(A)$ ein *-Homomorphismus ist. Insbesondere gilt

$$A^1 \hat{\cdot} A^{-1} = A^0 = A^{-1} \hat{\cdot} A^1,$$

wobei $A^0 = f_0(A) \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$, denn $f_0 = \chi_{\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}$.

Ferner ist $f_{z'} \circ f_z = f_{zz'}$ für alle $z, z' \in \mathbb{C}$, und wegen Proposition 2.6.4 folgt somit

$$(A^z)^{z'} = A^{zz'}.$$

Nun sei A zusätzlich *invertierbar*. Darunter wollen wir verstehen, dass A eine Inverse in $\overline{\mathcal{M}}$ besitzt; dies ist genau dann der Fall, wenn A injektiv ist mit dichtem Bild (dann ist die Umkehrfunktion A^{inv} dicht definiert und abgeschlossen; $u^*Au = A$ impliziert $u^*A^{inv}u = A^{inv}$, für $u \in \mathcal{M}'$, u unitär).

Beachte, dass hierbei nicht $A^{inv} \in \mathcal{M}$ gefordert ist, so dass $0 \in \operatorname{Sp} A$ möglich ist. Trotzdem wird $g(A)$ durch $g|_{(0,\infty)}$ eindeutig festgelegt, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.6.7. *Ist $A \in \overline{\mathcal{M}}$ ein positiver Operator und $\{e_\lambda\}$ die Spektralschar zu A, so ist e_0 die Projektion auf* Kern A. *Ist A zudem invertierbar und $g_1, g_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ mit $g_1|_{(0,\infty)} = g_2|_{(0,\infty)}$, dann gilt*

$$g_1(A) = g_2(A).$$

Beweis. Nach Proposition 2.6.3, (3) ist $\|A\xi\|^2 = \int_0^\infty \lambda^2 d\langle e_\lambda \xi, \xi\rangle$ für alle $\xi \in D(A)$ und deshalb ist $\xi \in \operatorname{Kern} A$ äquivalent zu $e_0\xi = \xi$. Dies zeigt $\operatorname{Kern} A = \operatorname{Bild} e_0$.

Ist speziell A invertierbar, so folgt $e_0 = 0$. Nach dem Beweis von Proposition 2.6.3, (3) ist damit $\chi_{(0,\infty)}(A) = \mathbf{1} - e_0 = \mathbf{1}$. Dies liefert $g_1(A) = g_1\chi(0,\infty)(A) = g_2\chi(0,\infty)(A) = g_2(A)$. □

Folgerungen. Es sei A ein positiver, invertierbarer Operator.

(1) Wegen $f_0|_{(0,\infty)} = 1$ folgt $A^0 = \mathbf{1}$, und damit ist $A^{-1} = A^{inv}$.

(2) Es ist $\log A := g(A)$ wohldefiniert, wobei $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ eine beliebige Fortsetzung des Hauptzweigs von log ist.

(3) Es sei $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ wie eben, $t \in \mathbb{R}$ und $e_t \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, $e_t(\lambda) := e^{it\lambda}$. Dann gilt $e_t(g(\lambda)) = e^{it\log\lambda} = \lambda^{it} = f_{it}(\lambda)$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Es folgt (siehe Proposition 2.6.4)

$$A^{it} = f_{it}(A) = (e_t \circ g)(A) = e_t(\log A) = e^{it\log A}.$$

2.7. Polarzerlegung

Die Polarzerlegung eines Operators ist in dieser Arbeit ein sehr wichtiges und häufig eingesetztes Werkzeug.

Satz 2.7.1 (Polarzerlegung)**.** *Es sei T ein abgeschlossener, dicht definierter Operator von H nach K. Dann existiert genau ein positiver Operator A auf H und eine partielle Isometrie $v \in \mathcal{L}(H,K)$ mit initialem Raum $H_0 = \overline{\operatorname{Bild} A}$, so dass $T = vA$.*

In diesem Fall ist $K_0 = \overline{\operatorname{Bild} T}$ der finale Raum von v und es ist $A = |T| := (T^*T)^{1/2}$. Ferner gilt

$$T = v|T| = |T^*|v.$$

Ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra und $T \in \overline{\mathcal{M}}$, so ist $v \in \mathcal{M}$ und $|T| \in \overline{\mathcal{M}}$.

Beweis. Existenz. Nach Proposition 2.2.4 ist T^*T ein selbstadjungierter Operator auf H und wegen $\langle T^*T\xi, \xi\rangle = \langle T\xi, T\xi\rangle \geq 0$ ist T positiv. Somit besitzt T^*T eine eindeutig bestimmte, positive Wurzel $A := |T| := (T^*T)^{1/2}$ (siehe Bemerkung zu Proposition 2.6.4). Außerdem ist $D_0 := D(T^*T)$ ein determinierender Bereich für T und $|T|$, siehe Bemerkung zu Proposition 2.2.4, so dass $|T|(D_0)$ und $T(D_0)$ dicht sind in $\operatorname{Bild}|T|$ und $\operatorname{Bild} T$.

Für alle $\xi \in D_0$ gilt nun $\langle |T|\xi, |T|\xi\rangle = \langle T^*T\xi, \xi\rangle = \langle T\xi, T\xi\rangle$, so dass

$$v_0 : |T|\xi \mapsto T\xi \text{ für } \xi \in D_0$$

eine Isometrie definiert, die sich zu einer partiellen Isometrie v mit initialem Raum $H_0 = \overline{\operatorname{Bild}}|T|$ und finalem Raum $K_0 = \overline{\operatorname{Bild}}T$ erweitern lässt. Es folgt

$$T\xi = v|T|\xi \text{ für alle } \xi \in D(T^*T).$$

Wir zeigen $T = v|T|$. Sei $\xi \in D(|T|)$ und wähle $(\xi_n) \subseteq D_0$ mit $\xi_n \longrightarrow \xi$ und $|T|\xi_n \longrightarrow |T|\xi$. Dann gilt $T\xi_n = v|T|\xi_n \longrightarrow v|T|\xi$, und da T abgeschlossen ist, folgt $\xi \in D(T)$ und $T\xi = v|T|\xi$; somit gilt $v|T| \subseteq T$. Ist nun $\xi \in D(T)$, wähle $(\xi_n) \subseteq D_0$ mit $\xi_n \longrightarrow \xi$ und $T\xi_n \longrightarrow T\xi$. Dann gilt $|T|\xi_n = v^*v|T|\xi_n = v^*T\xi_n \longrightarrow v^*T\xi$, und da $|T|$ abgeschlossen ist, folgt $\xi \in D(|T|)$; somit gilt $T = v|T|$.

Nach Proposition 2.1.4, (2c), gilt $T^* = |T|v^*$, also ist $TT^* = vT^*Tv^*$; es folgt $|T^*| := (TT^*)^{1/2} = v|T|v^*$. Ferner gilt $v^*v|T| = |T|$, so dass $|T| = |T|^* = |T|v^*v$ (siehe Proposition 2.1.4, (2c)). Insgesamt ist damit

$$T = v|T| = v|T|v^*v = |T^*|v.$$

Eindeutigkeit. Ist A ein positiver Operator auf H und $v \in \mathcal{L}(H, K)$ eine partielle Isometrie mit initialem Raum $H_0 = \overline{\operatorname{Bild}}A$, so dass $T = vA$; so gilt nach Proposition 2.1.4, (2c), $T^* = Av^*$. Es folgt $T^*T = Av^*vA = A^2$, so dass wegen der Eindeutigkeit der positiven Wurzel $A = (T^*T)^{1/2} = |T|$ sein muss.

Weil $\overline{\operatorname{Bild}}A$ der initiale Raum der partiellen Isometrie v ist, wird v durch die Gleichung $T = vA$ eindeutig festgelegt.

Zusatz. Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra und $T \in \overline{\mathcal{M}}$.

Ist $u \in L(H)$ unitär, so zeigen wir, dass $u^*Tu = (u^*vu)(u^*Au)$ die eindeutig bestimmte Polarzerlegung für u^*Tu ist. Zunächst einmal ist u^*Au ein positiver Operator, und $w := u^*vu$ ist eine partielle Isometrie, denn $w^*w = u^*v^*vu$ ist eine Projektion (auf den initialen Raum). Damit hat w als initialen Raum $u^*(H_0) = \overline{\operatorname{Bild}}u^*A = \overline{\operatorname{Bild}}u^*Au$.

Ist nun $u \in \mathcal{M}'$, u unitär, so ist $u^*Tu = T$ und aus der Eindeutigkeit der Polarzerlegung folgt $u^*vu = v$ und $u^*Au = A$; somit ist $v \in \mathcal{M}$ und $|T| = A \in \overline{\mathcal{M}}$. □

Wir benötigen die folgende Aussage im Kapitel über messbare Operatoren bezüglich eine Spur.

Korollar 2.7.2. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und $A \in \overline{\mathcal{M}}$. Sind $\{e_\lambda\}$ bzw. $\{f_\lambda\}$ die Spektralscharen zu $|A|$ bzw. $|A^*|$, so gilt $\mathbf{1} - e_\lambda \sim \mathbf{1} - f_\lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Für $\lambda < 0$ ist wegen $e_\lambda = f_\lambda = 0$ nichts zu zeigen.

Im Fall $\lambda = 0$ gilt nach Lemma 2.6.7 $K_1 := \operatorname{Bild}(1 - e_0) = (\operatorname{Kern}|A|)^\perp = \overline{\operatorname{Bild}}|A|$ und $K_2 := \operatorname{Bild}(1 - f_0) = (\operatorname{Kern}|A^*|)^\perp = \overline{\operatorname{Bild}}|A^*|$. Ist $v|A| = |A^*|v$ die Polarzerlegung von A, dann ist $v \in \mathcal{M}$ eine partielle Isometrie mit initialem Raum $\overline{\mathrm{Bild}}|A| = K_1$ und finalem Raum $\overline{\mathrm{Bild}} A = (\mathrm{Kern}\, A^*)^\perp = (\mathrm{Kern}\, |A^*|)^\perp = K_2$, so dass $1 - e_0 \sim 1 - f_0$.

Wir betrachten nun die Operatoren $B := |A||_{K_1}$ bzw. $C := |A^*||_{K_2}$ auf K_1 bzw. K_2 mit den Spektralscharen $\{e'_\lambda\}$ bzw. $\{f'_\lambda\}$. Die Abbildung $u := v|_{K_1} : K_1 \to K_2$ definiert eine surjektive Isometrie mit $u^*Cu = B$. Nach der Bemerkung zu Satz 2.4.7 gilt also $u^* f'_\lambda u = e'_\lambda$ und folglich $u^*(\mathbf{1}_{K_2} - f'_\lambda)u = \mathbf{1}_{K_1} - e'_\lambda$, d. h. $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_{K_1} - e'_\lambda)$ wird durch u isometrisch auf $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_{K_2} - f'_\lambda)$ abgebildet.

Im Fall $\lambda > 0$ gilt nun $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_H - e_\lambda) \subseteq K_1$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_H - f_\lambda) \subseteq K_2$, woraus man leicht $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_{K_1} - e'_\lambda) = \mathrm{Bild}(\mathbf{1}_H - e_\lambda)$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_{K_2} - f'_\lambda) = \mathrm{Bild}(\mathbf{1}_H - f_\lambda)$ erkennt. Daher wird $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_H - e_\lambda)$ durch v isometrisch auf $\mathrm{Bild}(\mathbf{1}_H - f_\lambda)$ ab, und es ergibt sich $\mathbf{1}_H - e_\lambda \sim \mathbf{1}_H - f_\lambda$. □

2.8. Stetige unitäre Gruppen

Der Borel'sche Funktionenkalkül ermöglicht es, zu einem selbstadjungierten Operator T auf H eine sog. unitäre Gruppe $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}(H)$, $u_t := e^{itT}$ zu definieren. Das Interesse an unitären Gruppen besteht seit Langem, weil man mit diesen Zustandsevolutionen in der Quantenphysik beschreiben kann. Hier betrachten wir unitäre Gruppen als wesentliches Hilfsmittel in der Modular-Theorie.

Definition. *Eine* unitäre Gruppe *ist eine Familie $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}(H)$ unitärer Operatoren, so dass $u_{s+t} = u_s u_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Die unitäre Gruppe heißt* stetig, *wenn die Abbildung $t \mapsto u_t\xi$ stetig für alle $\xi \in H$ ist.*

Der infinitesimale Erzeuger *einer unitären Gruppe $\{u_t\}$ ist der auf*

$$D(A) := \{\xi \in H \mid \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})\xi \ \textit{existiert}\}$$

durch $A\xi := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})\xi$ definierte (unbeschränkte) Operator auf H.

Bemerkung. (1) Die Stetigkeit einer unitären Gruppe folgt bereits aus der schwach-Operator-Stetigkeit von $t \mapsto u_t$ in 0. Denn für alle $\xi \in H$ ist dann $t \mapsto u_t\xi$ schwach stetig in 0 und es gilt $\|u_t\xi\| = \|\xi\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Es folgt $\|u_t\xi - \xi\|^2 = \|u_t\xi\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle u_t\xi, \xi\rangle + \|\xi\|^2 \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow 0$, so dass $t \mapsto u_t\xi$ stetig in 0 ist. Wegen $u_{s+t}\xi = u_t u_s \xi$ folgt die Stetigkeit in allen $s \in \mathbb{R}$.

(2) In der Tat ist $D(A) \subseteq H$ ein Teilraum und A ein linearer Operator. Ist $D(A)$ dicht, so ist $-iA$ symmetrisch, denn für alle $\xi, \eta \in D(A)$ gilt

$$\langle \xi, -iA\eta\rangle = i \lim_{t\to 0} \langle \xi, \tfrac{1}{t}(u_t - 1)\eta\rangle = i \lim_{t\to 0} \langle \tfrac{1}{t}(u_{-t} - \mathbf{1})\xi, \eta\rangle = \langle -iA\xi, \eta\rangle.$$

Lemma 2.8.1. *Für jeden selbstadjungierten Operator T auf H definiert $u_t := e^{itT}$ ($t \in \mathbb{R}$) eine stetige unitäre Gruppe $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ mit infinitesimalen Erzeuger iT.*

Beweis. Ist $g_t \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C})$ definiert durch $g_t(\lambda) := e^{it\lambda}$, so ist $u_t = g_t(T) \in \mathcal{L}(H)$ und es gilt $u_0 = g_0(T) = \mathbf{1}$, $u_s u_t = g_s(T) g_t(T) = g_{s+t}(T) = u_{s+t}(T)$, sowie $u_t^* = g_t(T)^* = \overline{g_t}(T) = g_{-t}(T) = u_{-t}$, so dass $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine unitäre Gruppe ist.

Sei $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar zu T, sowie $\xi \in H$, dann gilt

$$\lim_{t\to 0} \|(u_t - \mathbf{1})\xi\|^2 = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |e^{it\lambda} - 1|^2 d\langle e_\lambda \xi, \xi\rangle = 0$$

nach dem Grenzwertsatz von Lebesgue, denn $\lim_{t\to 0} e^{it\lambda} = 1$ und $|e^{it\lambda} - 1| \le 2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist die Abbildung $t \mapsto u_t\xi$ stetig in 0, und daher in allen $s \in \mathbb{R}$.

Es bleibt zu zeigen, dass der infinitesimale Erzeuger A von $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ gleich iT ist. Hierzu sei $\xi \in D(T)$. Wegen $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{it\lambda} - 1) = i\lambda$, sowie $|\frac{1}{t}(e^{it\lambda} - 1)| \le |\lambda|$ und $\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle < \infty$ gilt dann nach dem Grenzwertsatz von Lebesgue

$$\lim_{t\to 0} \|\tfrac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})\xi - iT\xi\|^2 = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\tfrac{1}{t}(e^{it\lambda} - 1) - i\lambda|^2 d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle = 0,$$

so dass $\xi \in D(A)$ und $A\xi = iT\xi$; somit gilt $T \subseteq -iA$. Nach der letzten Bemerkung ist $-iA$ symmetrisch, also gilt $-iA \subseteq (-iA)^* \subseteq T^* = T$, so dass $A = iT$. □

Bemerkung. Es sei A ein positiver, invertierbarer Operator auf H, dann definiert $u_t := A^{it} (= e^{it\log A})$ eine stetige unitäre Gruppe (siehe Folgerung (3) nach Lemma 2.6.7).

Satz 2.8.2 (Stone)**.** *Jede stetige unitäre Gruppe $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ist von der Form $u_t = e^{itT}$ $(t \in \mathbb{R})$, wobei T ein selbstadjungierter Operator auf H ist.*

Stones Charakterisierung (1932) stetiger, unitärer Gruppen kann als Resultat einer nicht-kommutativen harmonischen Analysis verstanden werden, doch der folgende Beweis (nach von Neumann) ist elementar.

Beweis. Es sei A der infinitesimale Erzeuger von $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ und $T := -iA$. Wir werden zeigen, dass T selbstadjungiert ist und $u_t = e^{itT}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ schließen.

Wir zeigen zunächst, dass A dicht definiert ist. Sei hierzu $\xi \in H$ und $r > 0$. Dann ist

$$\eta_r := \frac{1}{r}\int_0^r u_s\xi ds \in H$$

definiert, und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})\eta_r &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{rt}\left(\int_0^r u_{s+t}\xi ds - \int_0^r u_s\xi ds\right)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{rt}\left(\int_r^{t+r} u_s\xi ds - \int_0^t u_s\xi ds\right) = \tfrac{1}{r}(u_r\xi - \xi),\end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit von $t \mapsto u_t\xi$. Es folgt $\eta_r \in D(A)$, und wegen $\lim_{r\to 0} \eta_r = \xi$ folgt die Dichtheit von $D(A)$.

Nach der Bemerkung zu Definition 2.8 ist $T = -iA$ symmetrisch. Um zu zeigen, dass T selbstadjungiert ist, zeigen wir $\text{Bild}(T \pm i\mathbf{1}) = H$ bzw. $\text{Bild}(A \pm \mathbf{1}) = H$ (siehe Lemma 2.2.2). Für $\xi \in H$ ist

$$\eta := \int_0^\infty e^{-s}u_s\xi ds \in H$$

definiert, und es gilt

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})\eta &= \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-s}u_{s+t}\xi ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-s}u_s\xi ds \\
&= \frac{1}{t}\int_t^\infty e^{t-s}u_s\xi ds - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-s}u_s\xi ds \\
&= \frac{e^t - 1}{t}\int_0^\infty e^{-s}u_s\xi ds - e^t \cdot \frac{1}{t}\int_0^t e^{-s}u_s\xi ds,
\end{aligned}$$

so dass $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})\eta = \eta - \xi$, wegen $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} e^t = \mathbf{1}$ und $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t e^{-s}u_s\xi ds = \xi$. Damit ist $\eta \in D(A)$ und $A\eta = \eta - \xi$, d. h. $(\mathbf{1} - A)\eta = \xi$; weil $\xi \in H$ beliebig war, folgt $\mathrm{Bild}(A - \mathbf{1}) = H$. Betrachtet man

$$\eta' := \int_{-\infty}^0 e^s u_s \xi ds \in H,$$

so zeigt eine ganz analoge Rechnung $\eta' \in D(A)$ und $A\eta' = -\eta' - \xi$ und daraus folgt $\mathrm{Bild}(A + \mathbf{1}) = H$.

Es sei nun $v_t := e^{itT}$ $(t \in \mathbb{R})$, und wir müssen $u_t = v_t$ zeigen. Zunächst sei bemerkt, dass $u_s^*(\frac{1}{t}(u_t - \mathbf{1}))u_s = \frac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$, so dass $u_s^* A u_s = A$. Damit gilt auch $u_s^* T u_s$ und somit $u_s^* x u_s = x$ für alle $x \in \mathcal{M}$, wobei $\mathcal{M}$ die von T erzeugte von Neumann-Algebra ist (siehe Bemerkung nach Satz 2.4.1). Insbesondere gilt $u_s v_t = v_t u_s$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Es hat $\{v_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ wie $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ als infinitesimalen Erzeuger $iT = A$, so dass

$$\lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}(u_t - v_t)\xi = \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}(u_t - \mathbf{1})\xi - \lim_{t\to 0}\tfrac{1}{t}(v_t - \mathbf{1})\xi = 0$$

für alle $\xi \in D(A)$. Für $t > 0$ und $\xi \in D(A)$ folgt

$$\begin{aligned}
\|(u_t - v_t)\xi\| &= \|\sum_{k=0}^{n-1}(u_{\frac{n-k}{n}t}v_{\frac{k}{n}t} - u_{\frac{n-k-1}{n}t}v_{\frac{k+1}{n}t})\xi\| \\
&= \|\sum_{k=0}^{n-1} u_{\frac{n-k-1}{n}t}v_{\frac{k}{n}t}(u_{\frac{1}{n}t} - v_{\frac{1}{n}t})\xi\| \\
&\leq n\|(u_{\frac{1}{n}t} - v_{\frac{1}{n}t})\xi\| = t\|\tfrac{n}{t}(u_{\frac{t}{n}} - v_{\frac{t}{n}})\xi\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

für $n \longrightarrow \infty$, so dass $u_t\xi = v_t\xi$. Da $D(A) \subseteq H$ dicht ist, folgt $u_t = v_t$, wie gewünscht. $\square$

3. Messbare Operatoren bezüglich einer Spur

Die hier dargestellte Theorie verläuft nach [Ter81], Chapter I. Als weitere Quelle ist [Tak03], Section IX.2, zu nennen.

3.1. Projektionen - ein Nachtrag

Proposition 3.1.1. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und $x \in \mathcal{M}$. Dann sind die Projektionen auf $\overline{\text{Bild}}\, x$ und $\overline{\text{Bild}}\, x^*$ äquivalent.*

Beweis. Wir betrachten die Polarzerlegung $x = u|x|$. Es ist $u \in \mathcal{M}$ eine partielle Isometrie mit initialem Raum $\overline{\text{Bild}}|x| = (\text{Kern}\,|x|)^\perp = (\text{Kern}\,x)^\perp = \overline{\text{Bild}}\, x^*$ und finalem Raum $\overline{\text{Bild}}\, x$, und daraus folgt die Proposition. □

Lemma 3.1.2. *Es seien $e, f \in \mathcal{L}(H)_{\text{proj}}$ Projektionen. Dann ist*

$$\overline{\text{Bild}}(ef) = \text{Bild}(e - e \wedge (\mathbf{1} - f)).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\text{Kern}(fe) = \text{Bild}(\mathbf{1} - e) + \text{Bild}(e \wedge (\mathbf{1} - f)). \qquad (*)$$

Sei $\xi \in H$ mit $fe\xi = 0$; dann ist $e\xi = (\mathbf{1} - f)e\xi \in \text{Bild}(e \wedge (\mathbf{1} - f))$, und daher $\xi = (\mathbf{1} - e)\xi + e\xi \in \text{Bild}(\mathbf{1} - e) + \text{Bild}(e \wedge (\mathbf{1} - f))$. Ist umgekehrt $\xi = \eta + \zeta$ mit $\eta \in \text{Bild}(\mathbf{1} - e)$ und $\zeta \in \text{Bild}(e \wedge (\mathbf{1} - f))$, so folgt $\zeta = e\zeta = (\mathbf{1} - f)\zeta$ und somit $fe\xi = fe\eta + fe\zeta = fe(\mathbf{1} - e)\eta + f(\mathbf{1} - f)\zeta = 0$. Hiermit ist $(*)$ gezeigt.

Wegen $\text{Kern}(ef)^* = (\text{Bild}(ef))^\perp$, $(*)$ und $\text{Bild}(\mathbf{1} - e) \perp \text{Bild}(e \wedge (\mathbf{1} - f))$ folgt damit $\overline{\text{Bild}}(ef) = \text{Kern}(fe) = \text{Bild}(\mathbf{1} - e) + \text{Bild}(e \wedge (\mathbf{1} - f)) = \text{Bild}(\mathbf{1} - e + e \wedge (\mathbf{1} - f)) = \text{Kern}(e - e \wedge (\mathbf{1} - f))$, wie gewünscht. □

Satz 3.1.3 (Formel von Kaplansky)**.** *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und $e, f \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$. Dann gilt*

$$e \vee f - e \sim f - e \wedge f.$$

Beweis. Wir wenden Proposition 3.1.1 auf $x := (\mathbf{1} - e)f$ an und erhalten, dass die Projektionen auf $\overline{\text{Bild}}((\mathbf{1}-e)f)$ und auf $\overline{\text{Bild}}(f(\mathbf{1}-e))$ äquivalent sind. Nach Lemma 3.1.2 gilt $\overline{\text{Bild}}(f(\mathbf{1}-e)) = \text{Bild}(f - e \wedge f)$ und $\overline{\text{Bild}}((\mathbf{1}-e)f) = \text{Bild}(\mathbf{1} - e - (\mathbf{1}-e) \wedge (\mathbf{1}-f)) = \text{Bild}(\mathbf{1} - e - (\mathbf{1} - e \vee f)) = \text{Bild}(e \vee f - e)$, daher sind $f - e \wedge f$ und $e \vee f - e$ äquivalent. □

Folgerungen. Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra mit einer normalen, semifiniten, treuen Spur τ.

(1) Aus der Formel von Kaplansky folgt sofort

$$\tau(e \vee f) = \tau(e) + \tau(f) - \tau(e \wedge f) \quad (e, f \in \mathcal{M}_{\text{proj}}),$$

und speziell $\tau(e \vee f) \leq \tau(e) + \tau(f)$.

(2) Es gilt $\tau(\bigvee_i e_i) \leq \sum_i \tau(e_i)$ für alle Familien $\{e_i\}_{i \in I}$. Denn aus (1) folgt per Induktion $\tau(\bigvee_{j \in J} e_j) \leq \sum_{j \in J} \tau(e_j)$ für alle endlichen Familien $J \subseteq I$ und die Normalität der Spur τ impliziert dann (2).

(3) Es sei an die Schreibweise $e^\perp := \mathbf{1} - e$ für eine Projektion $e \in \mathcal{L}(H)_{\text{proj}}$ erinnert. Für $e, f \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ und $e \wedge f = 0$ gilt $\tau(e) \leq \tau(f^\perp)$. Denn aus $e \wedge f = 0$ folgt $e = \mathbf{1} - e^\perp = (e \wedge f)^\perp - e^\perp = e^\perp \vee f^\perp - e^\perp \sim f^\perp - e^\perp \wedge f^\perp \leq f^\perp$ und somit $\tau(e) \leq \tau(f^\perp)$.

3.2. Messbare Operatoren

Es sei τ eine normale, semifinite, treue Spur auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$. Ferner sei $\overline{\mathcal{M}}$ die Menge aller mit $\mathcal{M}$ affiliierten, abgeschlossen, dicht definierten Operatoren.

Definition. *Ein Operator $A \in \overline{\mathcal{M}}$ heiße* τ-messbar*, falls für alle $\delta > 0$ eine Projektion $e \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ existiert mit $\tau(e^\perp) \leq \delta$ und $Ae \in \mathcal{M}$.*

Die Menge aller τ-messbaren Operatoren werde mit $\widetilde{\mathcal{M}}$ bezeichnet.

Bemerkung. (1) In der Definition folgt $Ae \in \mathcal{M}$ bereits aus $\operatorname{Bild} e \subseteq D(A)$. Denn in diesem Fall ist Ae überall definiert und abgeschlossen nach Proposition 2.1.4, (2a), also gilt $Ae \in \mathcal{L}(H)$. Weil Ae nach Lemma 2.3.2 mit $\mathcal{M}$ affiliiert ist, folgt weiterhin $Ae \in \mathcal{M}$.

(2) Jede Operator $a \in \mathcal{M}$ ist τ-messbar (wähle $e = \mathbf{1}$), es ist also $\mathcal{M} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}$.

$\widetilde{\mathcal{M}}$ als *-Algebra

Ähnlich wie im Fall der mit einer kommutativen von Neumann-Algebra $\mathcal{N}$ affiliierten, abgeschlossenen, dicht definierten Operatoren $\overline{\mathcal{N}}$ (siehe Abschnitt 2.5), möchten wir die τ-messbaren Operatoren $\widetilde{\mathcal{M}}$ als *-Algebra ansehen. Hierfür sind einige Vorbereitungen notwendig.

Definition. *Zu $\delta, \varepsilon > 0$ sei $D(\varepsilon, \delta)$ die Menge aller mit $\mathcal{M}$ affiliierten Operatoren A, für die eine Projektion $e \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ existiert mit*

$$\tau(e^\perp) \leq \delta \quad \textit{und} \quad \operatorname{Bild} e \subseteq D(A), \|Ae\| \leq \varepsilon.$$

Die Forderung $\|Ae\| \leq \varepsilon$ möge stets $Ae \in \mathcal{L}(H)$ beinhalten (beachte, dass A nicht abgeschlossen zu sein braucht).

Bemerkung. Ist $A \in \overline{\mathcal{M}}$, so ist $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ äquivalent dazu, dass für alle $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $A \in D(\varepsilon, \delta)$.

Diese Bemerkung begründet das Interesse an den Mengen $D(\varepsilon, \delta)$, außerdem werden sie später benutzt, um eine Topologie auf $\widetilde{\mathcal{M}}$ zu definieren.

Lemma 3.2.1. *Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_2 > 0$. Dann gilt*

(1) $D(\varepsilon_1, \delta_1) + D(\varepsilon_2, \delta_2) \subseteq D(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$,

(2) $D(\varepsilon_1, \delta_1)D(\varepsilon_2, \delta_2) \subseteq D(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$.

Beweis. Es seien $A \in D(\varepsilon_1, \delta_1)$ und $B \in D(\varepsilon_2, \delta_2)$. Dann existieren $e, f \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit

$$\tau(e^\perp) \le \delta_1, \tau(f^\perp) \le \delta_2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Bild} e \subseteq D(A), \|Ae\| \le \varepsilon_1,\ \operatorname{Bild} f \subseteq D(B), \|Bf\| \le \varepsilon_2.$$

(1) Setzen wir $p := e \wedge f \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$, so folgt

$$\tau(p^\perp) = \tau(e^\perp \vee f^\perp) \le \tau(e^\perp) + \tau(f^\perp) \le \delta_1 + \delta_2,$$

sowie $\operatorname{Bild} p = \operatorname{Bild} e \cap \operatorname{Bild} f \subseteq D(A) \cap D(B) = D(A + B)$ und

$$\|(A + B)p\| = \|Ap + Bp\| \le \|Ap\| + \|Bp\| \le \|Ae\| + \|Bf\| \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Damit ist $A + B \in D(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$ gezeigt.

(2) Es sei q die Projektion auf $\operatorname{Kern}(e^\perp Bf)$, sowie $p := q \wedge f \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$. Dann ist nach Proposition 3.1.1 $q^\perp$ als Projektion auf $\operatorname{Bild}(e^\perp Bf)^*$ äquivalent zur Projektion auf $\operatorname{Bild}(e^\perp Bf)$, so dass $\tau(q^\perp) \le \tau(e^\perp)$ gilt; damit folgt

$$\tau(p^\perp) \le \tau(q^\perp) + \tau(f^\perp) \le \tau(e^\perp) + \tau(f^\perp) \le \delta_1 + \delta_2.$$

Für alle $\xi \in \operatorname{Bild} q$ gilt nun $Bf\xi = eBf\xi \in \operatorname{Bild} e \subseteq D(A)$, woraus $\operatorname{Bild} q \subseteq D(ABf)$ und damit $\operatorname{Bild} p \subseteq D(AB)$ folgt. Wegen $ABfq = AeBfq$ und $fqp = fp = p$ gilt weiterhin $ABp = ABfqp = AeBfp$ und damit

$$\|ABp\| \le \|Ae\|\|Bf\| \le \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Hiermit wurde $AB \in D(\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$ bewiesen. □

Lemma 3.2.2. *Es sei $A \in \overline{\mathcal{M}}$, sowie $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar (gemäß Satz 2.4.7) zu $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Dann ist $A \in D(\varepsilon, \delta)$ äquivalent zu $\tau(e_\varepsilon^\perp) \le \delta$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass $A \in D(\varepsilon, \delta)$ äquivalent zu $|A| \in D(\varepsilon, \delta)$ ist: Aus der Polarzerlegung $A = v|A|$ folgt zunächst $D(A) = D(v|A|) = D(|A|)$. Außerdem gilt $|A| = v^*v|A| = v^*A$, und im Fall $\operatorname{Bild} e \subseteq D(A) = D(|A|)$ folgt $\|Ae\| = \|v|A|e\| \le \||A|e\| = \|v^*Ae\| \le \|Ae\|$, also $\|Ae\| = \||A|e\|$.

Es sei nun $\{e_\lambda\}$ die Spektralschar zu $|A|$ und $\tau(e_\varepsilon^\perp) \le \delta$. Dann ist $\operatorname{Bild} e_\varepsilon \subseteq D(|A|)$, sowie $\||A|e_\varepsilon\| \le \delta$. Damit ist $|A| \in D(\varepsilon, \delta)$ und somit $A \in D(\varepsilon, \delta)$.

Ist umgekehrt $A \in D(\varepsilon, \delta)$, so existiert $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit $\tau(e^\perp) \le \delta$, $\operatorname{Bild} e \subseteq D(|A|)$ und $\||A|e\| \le \varepsilon$. Für alle $\xi \in \operatorname{Bild} e$ gilt daher $\||A|\xi\|^2 \le \varepsilon^2\|\xi\|^2$. Für $\xi \in \operatorname{Bild}(1 - e_\varepsilon)$, $\xi \ne 0$, gilt dagegen

$$\||A|\xi\|^2 = \int_{(\varepsilon,\infty)} \lambda^2 d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle > \varepsilon^2 \int_{(\varepsilon,\infty)} d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle = \varepsilon^2\|\xi\|^2,$$

nach Proposition 2.6.3, (3). Wir haben damit $\operatorname{Bild} e \cap \operatorname{Bild}(1 - e_\varepsilon) = \{0\}$ gezeigt, woraus $e \wedge 1 - e_\varepsilon = 0$ folgt. Aus Folgerung (3) nach Satz 3.1.3 ergibt sich $\tau(e_\varepsilon^\perp) \le \tau(e^\perp) \le \delta$, wie gewünscht. □

Bemerkung. Für $A \in \overline{\mathcal{M}}$ ist nach obigem Lemma $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ äquivalent zu $\tau(e_\lambda^\perp) \searrow 0$ für $\lambda \to \infty$.

Lemma 3.2.3. *Für $A \in \overline{\mathcal{M}}$ und $\varepsilon, \delta > 0$ gilt*

$$A \in D(\varepsilon, \delta) \;\Leftrightarrow\; A^* \in D(\varepsilon, \delta).$$

Beweis. Für die Spektralscharen $\{e_\lambda\}$ und $\{f_\lambda\}$ von $|A|$ und $|A^*|$ gilt nach Corollar 2.7.2 $e_\lambda^\perp \sim f_\lambda^\perp$ und damit $\tau(e_\lambda^\perp) = \tau(f_\lambda^\perp)$. Die Aussage folgt daher aus dem vorigen Lemma. □

Wir benötigen nun eine Verallgemeinerung des Begriffs der τ-Messbarkeit auf nicht notwendigerweise abgeschlossene Operatoren.

Definition. *Ein mit $\mathcal{M}$ affiliierter Operator A heißt* τ-prämessbar*, falls für alle $\delta > 0$ eine Projektion $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ existiert mit $\tau(e^\perp) \leq \delta$ und $Ae \in \mathcal{M}$.*

Ein Teilraum $K \subseteq H$ werde *τ-dicht* genannt, wenn für alle $\delta > 0$ eine Projektion $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ existiert mit $\tau(e^\perp) \leq \delta$ und $\operatorname{Bild} e \subseteq K$. Der Definitionsbereich $D(A)$ eines τ-prämessbaren Operators ist also τ-dicht.

Aus dem nächsten Lemma folgt, dass τ-prämessbare Operatoren dicht definiert sind.

Lemma 3.2.4. *Ein τ-dichter Teilraum $K \subseteq H$ ist dicht.*

Beweis. Wir wählen eine Folge $(e_k) \subseteq \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ mit $\tau(e_k^\perp) \leq \frac{1}{2^k}$ und $\operatorname{Bild} e_k \subseteq K$ für alle k, und setzen $f_n := \bigwedge_{k>n} e_k$ für alle n. Es ist $\operatorname{Bild} f_n = \bigcap_{k>n} \operatorname{Bild} e_k \subseteq K$, sowie

$$\tau(f_n^\perp) = \tau\Big(\bigvee_{k>n} f_k^\perp\Big) \leq \sum_{k>n} \tau(f_k^\perp) \leq \sum_{k>n} 2^{-k} = 2^{-n}.$$

Nun ist (f_n) eine monoton steigende Folge, und es sei $f := \lim_n f_n = \bigvee_n f_n$. Dann gilt $\tau(f^\perp) \leq \tau(f_n^\perp) \leq 2^{-n}$ für alle n, so dass $\tau(f^\perp) = 0$ und damit $f = \mathbf{1}$ sein muss. Wegen $\operatorname{Bild} f_n \subseteq K$ folgt die Dichtheit von K in H. □

Bemerkung. Ein mit $\mathcal{M}$ affiliierter Operator A ist genau dann τ-messbar, wenn A τ-prämessbar und abgeschlossen ist. Ist A τ-prämessbar und abschließbar, so ist der Abschluss $\overline{A}$ τ-messbar.

Proposition 3.2.5. (1) *Es seien A und B τ-prämessbar. Dann sind A^*, $A + B$ und AB ebenfalls τ-prämessbar.*

(2) *Es seien A und B τ-messbar. Dann ist A^* τ-messbar; $A + B$ und AB sind abschließbar und deren Abschlüsse $A \widehat{+} B$ und $A \widehat{\cdot} B$ sind τ-messbar.*

Beweis. (1) Nach Lemma 2.3.2 sind A^*, $A+B$ und AB mit $\mathcal{M}$ affiliiert. Die Behauptung folgt daher aus Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.1, sowie der Bemerkung, dass ein mit $\mathcal{M}$ affiliierter Operator A genau dann τ-prämessbar ist, wenn für alle $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $A \in D(\varepsilon, \delta)$.

(2) Es sind A^* und B^* abgeschlossen und τ-prämessbar nach (1), also τ-messbar. Nach (1) sind $A + B$ und $A^* + B^*$ τ-prämessbar und damit dicht definiert. Wegen $A + B \subseteq (A^* + B^*)^*$ ist $A + B$ abschließbar und nach der letzten Bemerkung ist $A \widehat{+} B$ τ-messbar. Analog argumentiert man für AB unter Benutzung von $AB \subseteq (B^* A^*)^*$. □

Um die *-Algebra-Gesetze auf $\widetilde{\mathcal{M}}$ nachweisen zu können, benötigen wir noch eine wichtige Eindeutigkeitsaussage.

Proposition 3.2.6. *Es seien $A, B \in \overline{\mathcal{M}}$ und K ein τ-dicher Teilraum mit*

$$K \subseteq D(A) \cap D(B) \quad \text{und} \quad A|_K = B|_K.$$

Dann ist $A = B$.

Wir beweisen zunächst ein Lemma.

Lemma 3.2.7. (1) *Es sei $e_0 \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$, so dass für alle $\delta > 0$ eine Projektion $e \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ existiert mit $\tau(e^\perp) \leq \delta$ und $e_0 \wedge e = 0$. Dann ist $e_0 = 0$.*

(2) *Es seien $e_1, e_2 \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$, so dass für alle $\delta > 0$ eine Projektion $e \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ existiert mit $\tau(e^\perp) \leq \delta$ und $e_1 \wedge e = e_2 \wedge e$. Dann ist $e_1 = e_2$.*

Beweis. (1) Aus der Voraussetzung folgt mit der Folgerung (3) nach Satz 3.1.3 $\tau(e_0) \leq \delta$ für alle $\delta > 0$. Also ist $\tau(e_0) = 0$ und $e_0 = 0$.

(2) Es sei $e_0 := e_1 - e_1 \wedge e_2$. Aus $e_1 \wedge e = e_2 \wedge e$ folgt dann $e_1 \wedge e = (e_1 \wedge e_2) \wedge e$ und damit $e_0 \wedge e = 0$. Somit erfüllt e_0 die Voraussetzung von (1) und es folgt $e_0 = 0$, also $e_1 = e_1 \wedge e_2$. Aus Symmetriegründen folgt $e_2 = e_1 \wedge e_2$, also ist $e_1 = e_2$. □

Beweis der Proposition. Wir betrachten die von Neumann-Algebra $M_2(\mathcal{M})$ auf H^2 mit der normalen, semifiniten, treuen Spur τ_2, definiert durch

$$\tau_2((x_{jk})) := \tau(x_{11}) + \tau(x_{22}) \quad ((x_{jk}) \in M_2(\mathcal{M})).$$

Wir bezeichnen die Projektionen auf die Graphen $G(A) \subseteq H^2$ bzw. $G(B) \subseteq H^2$ mit e_A bzw. e_B. Man verifiziert sofort, dass die Graphen $G(A)$ und $G(B)$ invariant bezüglich allen Elementen von

$$M_2(\mathcal{M})' = \{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid y \in \mathcal{M}'\}$$

sind, also sind e_A und e_B in $M_2(\mathcal{M})$.

Für alle $\delta > 0$ existiert eine Projektion $e \in \mathcal{M}_{\text{proj}}$ mit $\tau(e^\perp) \leq \delta$ und $\operatorname{Bild} e \subseteq K$. Setzen wir

$$e_2 := \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

so folgt $\tau_2(e_2^\perp) \leq 2\delta$. Weil A und B auf $\operatorname{Bild} e \subseteq K$ übereinstimmen ist

$$G(A) \cap \operatorname{Bild} e_2 = G(B) \cap \operatorname{Bild} e_2,$$

so dass $e_A \wedge e_2 = e_B \wedge e_2$ gilt. Nach dem letzten Lemma, (2), folgt $e_A = e_B$ und damit $A = B$. □

Satz 3.2.8. *Die Menge $\widetilde{\mathcal{M}}$ aller τ-messbaren Operatoren ist mit den Operationen $(A, B) \mapsto A \widehat{+} B$ und $(A, B) \mapsto A \widehat{\cdot} B$ eine *-Algebra.*

Beweis. Es seien $A, B, C \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Dann ist ABC nach Proposition 3.2.5 τ-prämessbar und besitzt nach der letzten Proposition höchstens eine Erweiterung in $\widetilde{\mathcal{M}}$. Daher folgt

$$(A \widehat{\cdot} B) \widehat{\cdot} C = A \widehat{\cdot} (B \widehat{\cdot} C).$$

Die anderen Gesetze beweist man analog. □

$\widetilde{\mathcal{M}}$ als topologische *-Algebra

Wir werden die Menge $\widetilde{\mathcal{M}}$ der τ-messbaren Operatoren mit einer Topologie versehen, welche uns bei der Konstruktion der nicht-kommutativen Integrationsräume behilflich sein wird.

Wir werden nachfolgend eher kleine Buchstaben für die Operatoren $a \in \widetilde{\mathcal{M}}$ verwenden. Außerdem schreiben wir in $\widetilde{\mathcal{M}}$ fortan auch $a + b$ und ab für $a \widehat{+} b$ und $a \widehat{\cdot} b$.

Definition. *Zu $\varepsilon, \delta > 0$ definiere*

$$N(\varepsilon, \delta) := \widetilde{\mathcal{M}} \cap D(\varepsilon, \delta),$$

d. h. $N(\varepsilon, \delta)$ enthält alle $a \in \widetilde{\mathcal{M}}$ für die $e \in \mathcal{M}_{\mathrm{proj}}$ existiert mit $\tau(e^\perp) \leq \delta$ und $\|ae\| \leq \varepsilon$.

Lemma 3.2.9. *Für $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \delta_1, \delta_2 > 0$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt*

(1) $N(\varepsilon, \delta)^* = N(\varepsilon, \delta)$,

(2) $N(|\lambda|\varepsilon, \delta) = \lambda N(\varepsilon, \delta)$,

(3) $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2,\ \delta_1 \leq \delta_2 \Rightarrow N(\varepsilon_1, \delta_1) \subseteq N(\varepsilon, \delta_2)$,

(4) $N(\varepsilon_1, \delta_1) \cap N(\varepsilon, \delta_2) \supseteq N(\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \min(\delta_1, \delta_2))$,

(5) $N(\varepsilon_1, \delta_1) + N(\varepsilon_2, \delta_2) \subseteq N(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$,

(6) $N(\varepsilon_1, \delta_1) N(\varepsilon_2, \delta_2) \subseteq N(\varepsilon_1 \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$.

Beachte, dass bei (5) und (6) die Operationen $\widehat{+}$ bzw. $\widehat{\cdot}$ gemeint sind.

Beweis. Man verifiziert (2), (3) und (4) ohne Probleme direkt. Weiterhin folgt (1) aus Lemma 3.2.3 und (5), (6) aus Lemma 3.2.1. □

Unter einer topologischen *-Algebra verstehen wir eine *-Algebra mit einer Topologie, so dass die algebraischen Operationen Addition, Skalarmultiplikation, Multiplikation und Involution stetig sind.

Satz 3.2.10. *Die $N(\varepsilon, \delta)$, $\varepsilon, \delta > 0$ bilden eine Nullumgebungsbasis für eine Topologie auf $\widetilde{\mathcal{M}}$, mit der $\widetilde{\mathcal{M}}$ zu einer vollständigen topologischen Hausdorff *-Algebra wird, in der $\mathcal{M}$ dicht liegt.*

Beweis. Dass die $N(\varepsilon, \delta)$ eine Topologie erzeugen folgt aus dem Lemma, (4). Aus dem Lemma, (5), (2) und (1) folgt, dass die Addition, die Skalarmultiplikation und die Involution stetig ist.

Wir zeigen nun, dass die Multiplikation stetig ist. Sei hierzu $a_0, b_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}$ und $\varepsilon, \delta > 0$. Wir wählen dann $\lambda, \mu > 0$ mit $a_0 \in N(\mu, \delta)$ und $b_0 \in N(\lambda, \delta)$. Sei nun $a \in a_0 + N(\varepsilon, \delta)$ und $b \in b_0 + N(\varepsilon, \delta)$ gegeben, so folgt nach dem Lemma, (6) und (5)

$$\begin{aligned} ab - a_0 b_0 &= (a - a_0)(b - b_0) + a_0(b - b_0) + (a - a_0) b_0 \\ &\in N(\varepsilon^2, 2\delta) + N(\mu\varepsilon, 2\delta) + N(\varepsilon\lambda, 2\delta) \subseteq N(\varepsilon(\varepsilon + \mu + \lambda), 6\delta); \end{aligned}$$

die Multiplikation $(a, b) \mapsto ab$ ist also stetig.

Um zu zeigen, dass die Topologie Hausdorff ist, zeigen wir zunächst

$$\bigcap_{\varepsilon>0,\delta>0} N(\varepsilon, \delta) = \{0\}.$$

Ist $a \in N(\varepsilon, \delta)$ für alle $\varepsilon, \delta > 0$, so ist nach Lemma 3.2.2 $\tau(e_\varepsilon) \leq \delta$, wobei $\{e_\lambda\}$ die Spektralschar zu $|a|$ bezeichne. Es folgt $\tau(e_\varepsilon) = 0$ und damit $e_\varepsilon = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Daher ist $|a| = 0$ und damit $a = 0$.

Ist nun $a \neq 0$ gegeben, so ist nach dem bereits Gezeigten $a \notin N(\varepsilon, \delta)$ für gewisse $\varepsilon, \delta > 0$. Nach dem Lemma, (5) sind dann $N(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2})$ und $a+N(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2})$ disjunkte Umgebungen von 0 und a.

Wir zeigen jetzt die Dichtheit von $\mathcal{M}$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$. Es sei $a \in \widetilde{\mathcal{M}}$ gegeben. Nach dem Beweis von Lemma 3.2.4 existiert eine aufsteigende Folge $(e_n) \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ mit $\tau(e_n^\perp) \longrightarrow 0$ und $\bigcup_n \operatorname{Bild} e_n \subseteq D(a)$. Für alle $m \leq n$ ist dann $\|(ae_n - a)e_m\| = 0$, und aus $\tau(e_m^\perp) \longrightarrow 0$ folgt $ae_n \longrightarrow a$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$. Da alle $ae_n \in \mathcal{M}$ sind, ist die Dichtheit bewiesen.

Es bleibt die Vollständigkeit von $\widetilde{\mathcal{M}}$ zu zeigen. Weil etwa $N(\frac{1}{n}, \frac{1}{m})$, $m, n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis ist, reicht es zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge $(a_n) \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}$ konvergiert. Wir dürfen $a_n \in \mathcal{M}$ für alle n annehmen; denn ansonsten können wir $a_n \in \widetilde{\mathcal{M}}$ durch $a_n' \in a_n + N(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ersetzen, und es konvergiert (a_n) genau dann, wenn (a_n') konvergiert. Ferner dürfen wir annehmen, dass

$$a_{n+1} \in a_n + N(\tfrac{1}{2^{n+1}}, \tfrac{1}{2^n})$$

gilt, da wir ansonsten zu einer entsprechenden Teilfolge übergehen.

Nun existiert eine Folge $(e_k) \subseteq \mathcal{M}_{\text{proj}}$ mit $\tau(e_k^\perp) \leq \frac{1}{2^k}$ und $\|(a_{k+1} - a_k)e_k\| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Setzen wir $f_n := \bigwedge_{k>n} e_k$, so folgt $\tau(f_n^\perp) \leq \frac{1}{2^n}$ (vgl. den Beweis von Lemma 3.2.4). Für alle $k \geq m \geq n+1$ ist nun $f_n \leq e_k$ und damit gilt für alle $l \in \mathbb{N}$

$$\|(a_{m+l} - a_m)f_n\| \leq \sum_{k=m}^{m+l-1} \|(a_{k+1} - a_k)e_k\| \leq \sum_{k=m}^{m+l-1} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^m}, \tag{$*$}$$

d. h. $(a_m f_n)_m$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$.

Wir setzen $D_0 := \bigcup_n \operatorname{Bild} f_n$. Für alle $\xi \in D_0$ ist dann $(a_m\xi)_m$ eine Cauchy-Folge in H und durch

$$a\xi := \lim_m a_m \xi$$

wird ein linearer Operator a auf $D(a) := D_0$ definiert. Es ist a τ-prämessbar, denn für alle n ist $\tau(f_n^\perp) \leq \frac{1}{2^n}$, $\operatorname{Bild} f_n \subseteq D(a)$, sowie $af_n = \lim_m a_m f_n \in \mathcal{M}$.

Wir zeigen nun, dass a abschließbar ist. Hierzu wenden wir die bisherige Argumentation auf (a_n^*) an und erhalten so einen τ-prämessbaren Operator b mit $b\eta = \lim_m a_m^*\eta$ für alle $\eta \in D(b)$. Es folgt

$$\langle a\xi, \eta\rangle = \lim_m \langle a_m\xi, \eta\rangle = \lim_m \langle \xi, a_m^*\eta\rangle = \langle \xi, b\eta\rangle \quad (\xi \in D(a), \eta \in D(b));$$

damit ist $a \subseteq b^*$, also ist a abschließbar.

Nun ist der Abschluss $a_0 := \overline{a}$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$, und es bleibt zu zeigen, dass a_0 der gesuchte Grenzwert der Cauchy-Folge (a_n) ist. Es sei $\varepsilon, \delta > 0$ gegeben und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{2^{n_0+1}} \leq \varepsilon$ und $\frac{1}{2^{n_0}} \leq \delta$ gewählt. Für alle $m \geq n_0 + 1$ gilt dann

$$(a_0 - a_m) f_{n_0} \xi = \lim_l (a_{m+l} - a_m) f_{n_0} \xi, \text{ sowie } \|(a_{m+l} - a_m) f_{n_0}\| \leq \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n_0+1}} \leq \varepsilon,$$

nach $(*)$. Daraus folgt $\|(a_0 - a_m) f_{n_0}\| \leq \varepsilon$, und wegen $\tau(f_{n_0}^{\perp}) \leq \frac{1}{2^{n_0}} \leq \delta$ ist damit $a_m \in a_0 + N(\varepsilon, \delta)$ gezeigt. Damit ist $a_m \longrightarrow a_0$ in $\widetilde{\mathcal{M}}$ bewiesen. □

3.3. L_p-Räume mit einer Spur

Für $A \in \overline{\mathcal{M}}_+$ definiere

$$\tau(A) := \sup_{\lambda \geq 0} \tau(A e_\lambda),$$

wobei $\{e_\lambda\}$ die Spektralschar zu A bezeichne.

Definition. *Für $p \in [1, \infty)$ sei*

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) := \{a \in \overline{\mathcal{M}} \mid \tau(|a|^p) < \infty\},$$
$$\|a\|_p := \tau(|a|^p)^{1/p} \quad (a \in \mathcal{L}_p(\mathcal{M}, \tau)).$$

Satz 3.3.1. *Es ist $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ ein Banachraum.*

Für einen Beweis dieser Aussage, siehe etwa [Tak03], Theorem IX.2.13; wir werden sie nicht direkt benötigen.

Beispiele. Wir betrachten die Beispiele aus Abschnitt 1.10.

(1) Es sei $\mathcal{M} := \{m_g \mid g \in L_\infty(\mathbb{R})\}$ die Multiplikationsalgebra aus Proposition 1.2.2 und $\varphi : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$, $m_g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(t) dt$ das Lebesgue-Integral.

In diesem Fall ist $\widetilde{\mathcal{M}}$ der Abschluss von $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$ bezüglich der Topologie der Konvergenz im Maß. Hier haben wir $L_p(\mathcal{M}, \varphi) \cong L_p(\mathbb{R})$.

(2) Auf $\mathcal{M} = \mathcal{L}(H)$ betrachten wir die Spur $\mathrm{tr} : \mathcal{L}(H)_+ \to [0, \infty]$, $x \mapsto \sum_{i \in I} \langle x \varepsilon_i, \varepsilon_i \rangle$, wobei $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von H sei.

In diesem Fall ist $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} = \mathcal{L}(H)$, und $L_p(\mathcal{M}, \mathrm{tr}) = S_p$, wobei S_p die Schatten-p-Klasse bezeichne.

4. Modular-Theorie

Unser Ziel ist es, zu einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ mit einem treuen, normalen Zustand φ einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \to \operatorname{Aut} \mathcal{M}$, $t \mapsto \sigma_t^\varphi$ zu definieren.[1] Dessen Bild ist die sog. modulare Automorphismusgruppe $\{\sigma_t^\varphi\}_{t\in\mathbb{R}}$; diese Gruppe werden wir später durch eine sog. modulare Bedingung (KMS-Bedingung) charakterisieren.

Die vorliegende Darstellung orientiert sich an [KaR86], Section 9.2, und Section 13.1. (Theorem 13.1.9).

4.1. Tomitas Satz

Ist $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra, φ ein treuer, normaler Zustand, und H_φ der zugehörige GNS-Hilbertraum, so ist die GNS-Darstellung $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{L}(H_\varphi)$ eine isometrische *-Einbettung und das Bild ist eine von Neumann-Algebra mit zyklischem und separierendem Vektor.

Wegen dieser Vorbemerkung definieren wir die modulare Automorphismusgruppe $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ zunächst für eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ mit einem zyklischen und separierenden Vektor $\xi_0 \in H$, und zwar durch $\sigma_t(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$, wobei Δ ein gewisser unbeschränkter, positiver Operator auf H ist, der sog. modulare Operator. Die Wohldefiniertheit wird aus Tomitas Satz folgen, der gleichzeitig besagt, dass (stets unter der Annahme, dass ein zyklischer und separierender Vektor existiert) $\mathcal{M}$ isometrisch isomorph zum Kommutanten $\mathcal{M}'$ ist.

Konjugiert-lineare Operatoren

Es werden im Folgenden Operatoren verwendet, die unter Benutzung der Involution $x \mapsto x^*$ gebildet werden. Diese sind konjugiert-linear, können aber mit Hilfe des sog. konjugierten Hilbertraums als lineare Operatoren betrachtet werden.

Definition. *Zu einem Hilbertraum $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definiere den* konjugierten *Hilbertraum $(\overline{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle^-)$ als Menge H mit den Vektorraum-Verknüpfungen*

$$(\xi, \eta) \mapsto \xi + \eta, \quad (\lambda, \xi) \mapsto \lambda \bar{\cdot} \xi := \overline{\lambda}\xi \quad (\xi, \eta \in H, \lambda \in \mathbb{C})$$

und Skalarprodukt

$$(\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta\rangle^- := \langle \eta, \xi\rangle \quad (\xi, \eta \in H).$$

Bemerkung. (1) Man verifiziert leicht, dass $\overline{H}$ in der Tat ein Hilbertraum ist.

[1] Nach Satz 1.9.2 lassen gerade die σ-endlichen von Neumann-Algebren einen treuen, normalen Zustand zu. Im Fall $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ mit H separabel, ist dies beispielsweise der Fall.

(2) Der Operator $\iota : H \to \overline{H}$, $\iota\xi = \xi$ $(\xi \in H)$, ist eine konjugiert-lineare, surjektive Isometrie mit $\langle \iota\xi, \iota\eta\rangle^- = \langle \eta, \xi\rangle$.

(3) Ist $A : D(A) \subseteq H \to H$ ein konjugiert-linearer (unbeschränkter) Operator, so definieren $\iota A : D(A) \subseteq H \to \overline{H}$ und $A\iota^{-1} : D(A) \subseteq \overline{H} \to H$ lineare Operatoren. Ist A dicht definiert ist, so ist $(\iota A)^*$ definiert als Operator $D((\iota A)^*) \subseteq \overline{H} \to H$.

Definition. *Es sei $A : D(A) \subseteq H \to H$ ein konjugiert-linearer, dicht definierter Operator. Der zu A* adjungierte *Operator $A^* : D(A^*) \subseteq H \to H$ ist definiert durch*

$$D(A^*) := D((\iota A)^*), \quad A^* := (\iota A)^* \iota.$$

Bemerkung. (1) Es ist A^* konjugiert-linear, und

$$\langle A\xi, \eta\rangle = \langle A^*\eta, \xi\rangle \quad (\xi \in D(A), \eta \in D(A^*)),$$

denn $\langle A^*\eta, \xi\rangle = \langle (\iota A)^*\iota\eta, \xi\rangle = \langle \iota\eta, \iota A\xi\rangle^- = \langle A\xi, \eta\rangle$.
Genauer gilt $(\eta, \zeta) \in G(A^*)$ genau dann, wenn $\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \zeta, \xi\rangle$ für alle $\xi \in D(A)$.

(2) Sei $A : D(A) \subseteq H \to H$ konjugiert-linear, dicht definiert und abgeschlossen, dann besitzt ιA eine Polarzerlegung $\iota A = v|\iota A| = |(\iota A)^*|v$, wobei $v \in \mathcal{L}(H, \overline{H})$ eine partielle Isometrie ist mit initialem Raum $H_0 = [\text{Bild}\,|\iota A|]$.
Diese überträgt sich auf A durch $A = w|A| = |A^*|w$, wobei $|A| := (A^*A)^{1/2}$, $|A^*| := (AA^*)^{1/2}$ und $w := \iota^{-1}v : H \to H$ eine konjugiert-lineare, partielle Isometrie ist. Denn $A^*A = (\iota A)^*\iota A$, also $A = \iota^{-1}v|\iota A| = w|A|$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} A &= \iota^{-1}|(\iota A)^*|v = \iota^{-1}(\iota A(\iota A)^*)^{1/2}v = \iota^{-1}(\iota A(\iota A)^*\iota\iota^{-1})^{1/2}v \\ &= \iota^{-1}\iota(A(\iota A)^*\iota)^{1/2}\iota^{-1}v = (A(\iota A)^*\iota)^{1/2}\iota^{-1}v = (AA^*)^{1/2}\iota^{-1}v = |A^*|w. \end{aligned}$$

(3) Es sei A selbstadjungiert und u eine konjugiert-lineare, surjektive Isometrie. Ist $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar zu A, dann ist $\{u^*e_\lambda u\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar zu u^*Au; dies wird wie in der Bemerkung nach Satz 2.4.7 gezeigt.

(4) Ist A selbstadjungiert, u wie eben und $f \in \mathcal{B}_\infty(\mathbb{C})$, dann gilt $f(u^*Au) = u^*\overline{f}(A)u$.
Denn für alle $\xi \in H$ ist $\langle u^*e_\lambda u\xi, \xi\rangle = \langle u\xi, e_\lambda u\xi\rangle = \langle e_\lambda u\xi, u\xi\rangle$, also gilt für alle $\xi \in H$ nach (3) und Proposition 2.6.3, (3)

$$\begin{aligned} \langle f(u^*Au)\xi, \xi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\langle u^*e_\lambda u\xi, \xi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)d\langle e_\lambda u\xi, u\xi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f}(\lambda)d\langle e_\lambda u\xi, u\xi\rangle^- \\ &= \langle \overline{f}(A)u\xi, u\xi\rangle^- = \langle u\xi, \overline{f}(A)u\xi\rangle = \langle u^*\overline{f}(A)u\xi, \xi\rangle. \end{aligned}$$

Der modulare Operator

Es sei stets $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra mit einem zyklischen und separierenden Vektor ξ_0. Um den modularen Operator Δ zu definieren, sind einige Vorbereitungen notwendig.

Definition. *Es seien S_0 und F_0 Operatoren auf H mit $D(S_0) := \mathcal{M}\xi_0$, $D(F_0) := \mathcal{M}'\xi_0$, und*

$$S_0x\xi_0 := x^*\xi_0, \quad F_0a\xi_0 := a^*\xi_0 \quad (x \in \mathcal{M}, a \in \mathcal{M}').$$

Bemerkung. Da ξ_0 separierend für $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ ist, sind S_0 und F_0 wohldefiniert; die Operatoren sind konjugiert-linear. Da ξ_0 zyklisch für $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ ist, sind S_0 und F_0 dicht definiert.

Lemma 4.1.1. *Es ist S_0 abschließbar und $F_0 \subseteq S_0^*$. Wir definieren $S := \overline{S_0}$ und $F := S_0^*$, so dass $S^* = F$. Ferner ist $S^2 = \mathrm{id}|_{D(S)}$, $F^2 = \mathrm{id}|_{D(F)}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst $G(F_0) \subseteq G(S_0^*)$. Sei $(a\xi_0, F_0 a\xi_0) \in G(F_0)$ gegeben, wobei $a \in \mathcal{M}'$, dann ist $(a\xi_0, F_0 a\xi_0) \in G(S_0^*)$, denn für alle $x \in \mathcal{M}$ ist

$$\langle S_0 x\xi_0, a\xi_0\rangle = \langle x^*\xi_0, a\xi_0\rangle = \langle a^*x^*\xi_0, \xi_0\rangle = \langle x^*a^*\xi_0, \xi_0\rangle = \langle a^*\xi_0, x\xi_0\rangle = \langle F_0 a\xi_0, x\xi_0\rangle$$

(vgl. Bemerkung (1) nach Def. 4.1). Es folgt $F_0 \subseteq S_0^*$, so dass S_0^* dicht definiert und S_0 damit abschließbar ist; ferner ist $S^* = \overline{S_0}^* = S_0^* = F$ (siehe Proposition 2.1.2).

Nun zeigen wir $\mathrm{id}|_{D(F)} \subseteq F^2$, was wegen $D(F^2) \subseteq D(F)$ die Gleichheit impliziert. Hierfür reicht es, $(F\eta, \eta) \in G(F)$, d. h. $(S_0^*\eta, \eta) \in G(S_0^*)$, für alle $\eta \in D(F)$ zu zeigen. Dies gilt, denn für alle $x \in \mathcal{M}$ ist

$$\langle S_0 x\xi_0, S_0^*\eta\rangle = \langle x^*\xi_0, S_0^*\eta\rangle = \langle \eta, S_0 x^*\xi_0\rangle = \langle \eta, x\xi_0\rangle.$$

Schließlich bleibt $\mathrm{id}|_{D(S)} \subseteq S^2$ zu zeigen, was aus $(S\xi, \xi) \in G(S) = G(F^*)$ für alle $\xi \in D(S)$ folgt. Sei hierfür $\eta \in D(F)$, dann ist

$$\langle F\eta, S\xi\rangle = \langle \xi, S^*F\eta\rangle = \langle \xi, F^2\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle,$$

da nach dem letzten Absatz $\eta \in D(F^2)$ und $F^2\eta = \eta$ gilt. □

Bemerkung. Nicht gezeigt (aber richtig) ist $F = \overline{F_0}$.

Definition. *Es seien S und F die konjugiert-linearen, dicht definierten und abgeschlossen Operatoren auf H von Lemma 4.1.1. Wir definieren den* modularen Operator Δ *durch $\Delta := S^*S = FS$, sowie den konjugiert-linearen Operator J auf H durch die Polarzerlegung*

$$S = J|S| = J\Delta^{1/2}.$$

Wir zeigen, dass Δ ein positiver, invertierbarer Operator ist. Wir können dann die komplexen Potenzen $\Delta^z := f_z(\Delta)$ für $z \in \mathbb{C}$ betrachten, sowie deren Gesetzmäßigkeiten benutzen (siehe Ende von Abschnitt 2.6).

Lemma 4.1.2. *Es ist Δ ein positiver, invertierbarer Operator mit $\Delta^{-1} = SF = SS^*$, und J ist eine surjektive Isometrie mit $J^2 = \mathbf{1}$. Weiterhin gilt*

$$S = J\Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2}J \text{ und } F = J\Delta^{-1/2} = \Delta^{1/2}J,$$

$J\Delta^{it} = \Delta^{it}J$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $J\xi_0 = \Delta\xi_0 = \xi_0$.

Beweis. Es ist $\Delta = S^*S = (\iota S)^*\iota S$ und nach Proposition 2.2.4 somit selbstadjungiert; wegen $\langle \Delta\xi, \xi\rangle = \langle \iota S\xi, \iota S\xi\rangle \geq 0$ für alle $\xi \in D(\Delta)$ ist Δ positiv. Weiterhin ist $\Delta SF = FSSF = F\,\mathrm{id}|_{D(S)}F = \mathrm{id}|_{D(SF)}$, und $SF\Delta = SFFS = S\,\mathrm{id}|_{D(F)}S = \mathrm{id}|_{D(FS)}$, also ist Δ injektiv mit dichtem Bild, d. h. invertierbar mit inversem Operator $\Delta^{-1} = SF$.

Die partielle Isometrie J hat $H_0 = [\mathrm{Bild}\,\Delta^{1/2}]$ als initialen und $K_0 = [\mathrm{Bild}\,S]$ als finalen Raum. Wegen $\mathrm{Bild}\,\Delta^{1/2} \supseteq \mathrm{Bild}\,\Delta$ und $\mathrm{Bild}\,S \supseteq \mathrm{Bild}\,SF = \mathrm{Bild}\,\Delta^{-1}$ und der Dichtheit der Bilder von Δ und Δ^{-1} folgt $H_0 = K_0 = H$ und J ist eine surjektive Isometrie (d. h. ιJ ist unitär).

Die Polarzerlegung (Bemerkung (2) zu Definition 4.1) liefert $S = J|S| = |S^*|J$, und es ist $|S| = (S^*S)^{1/2} = \Delta^{1/2}$, sowie $|S^*| = (SS^*)^{1/2} = \Delta^{-1/2}$, also ist $S = J\Delta^{1/2} = \Delta^{-1/2}J$. Für alle $\xi \in D(S)$ folgt $\xi = SS\xi = J\Delta^{1/2}\Delta^{-1/2}J\xi = JJ\xi$; weil $D(S)$ dicht ist in H gilt somit $J^2 = \mathbf{1}$, und es folgt somit $J = J^{-1} = J^*$. Nach Proposition 2.1.4, (2c), gilt nun $F = S^* = (J\Delta^{1/2})^* = \Delta^{1/2}J$ bzw. $F = S^* = (\Delta^{-1/2}J)^* = J\Delta^{-1/2}$.

Wir zeigen $J\Delta^{it} = \Delta^{it}J$ für $t \in \mathbb{R}$. Es ist $\Delta^{-1} = SF = J\Delta^{1/2}\Delta^{1/2}J = J\Delta J = J\Delta J^*$; nach Bemerkung (4) zu Definition 4.1 folgt $f_{-it}(\Delta^{-1}) = J\overline{f_{-it}}(\Delta)J^* = Jf_{it}(\Delta)J$, also $\Delta^{it} = J\Delta^{it}J$, so dass $\Delta^{it}J = J\Delta^{it}$.

Schließlich ist $\Delta\xi_0 = FS\xi_0 = F\xi_0 = \xi_0$, so dass nach Lemma 2.6.6 $\Delta^{1/2}\xi_0 = \xi_0$. Es folgt $J\xi_0 = J\Delta^{1/2}\xi_0 = S\xi_0 = \xi_0$. □

Beweis von Tomitas Satz

Mit den eingeführten Bezeichnungen können wir nun den Satz von Tomita formulieren.

Satz 4.1.3 (Tomitas Satz)**.** *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra mit zyklischem und separierendem Vektor ξ_0. Für die Operatoren Δ und J aus Definition 4.1 gilt*

$$J\mathcal{M}J = \mathcal{M}' \text{ und } \Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Aussage des Satzes folgt leicht, wenn

$$\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} \subseteq J\mathcal{M}'J \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{$*$}$$

gezeigt werden kann. Dann muss nämlich nur noch $J\mathcal{M}'J \subseteq \mathcal{M}$ gezeigt werden und dies kann elementar geschehen (siehe unten).

Zum Beweis von $(*)$ muss $\Delta^{it}x\Delta^{-it} \in J\mathcal{M}'J$ gezeigt werden, für $x \in \mathcal{M}$ und $t \in \mathbb{R}$. Weil $J\mathcal{M}'J$ schwach-Operator abgeschlossen ist, reicht es hierfür zu zeigen, dass $\omega(\Delta^{it}x\Delta^{-it}) = 0$, für alle schwach-Operator stetigen Funktionale ω auf $\mathcal{L}(H)$ mit $\omega|_{J\mathcal{M}'J} = 0$. Sei solch ein ω gegeben. Wir zeigen dann, dass die stetige Funktion

$$f(t) = \frac{1}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\omega(\Delta^{it}x\Delta^{-it})$$

die Fourier-Transformierte $\widehat{f} = 0$ besitzt, woraus (nach einem klassischen Resultat der Fourier-Analysis) $f = 0$ folgt.

Wir zeigen daher

$$\frac{\widehat{f}(\log r)}{\sqrt{r}} = \int \frac{r^{it-1/2}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\omega(\Delta^{it}x\Delta^{-it})dt = 0 \quad (r > 0),$$

und dies folgt wegen $\omega|_{J\mathcal{M}'J} = 0$ aus

$$\int \frac{r^{it-1/2}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}\langle\Delta^{it}x\Delta^{-it}\xi, \eta\rangle dt = \langle Ja_r^*J\xi, \eta\rangle \text{ für ein } a_r \in \mathcal{M}' \quad (\xi, \eta \in H)$$

für alle $r > 0$ (denn jedes schwach-Operator stetiges Funktional ω hat die Form $\omega(\cdot) = \sum_{i=1}^k \langle \cdot \xi_i, \eta_i \rangle$). Die letzte Gleichung ergibt sich aus einer Kombination der folgenden beiden Lemmata.

Lemma 4.1.4. *Es sei $x \in \mathcal{M}$ und $r > 0$.*

(1) *Ist $\eta_0 := (\Delta^{-1} + r\mathbf{1})^{-1} x\xi_0$, dann existiert $a \in \mathcal{M}'$ mit $a\xi_0 = \eta_0$.*

(2) *Für alle $\xi, \eta \in D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$ gilt*

$$\langle x\xi, \eta \rangle = \langle Ja^* J\Delta^{1/2}\xi, \Delta^{-1/2}\eta \rangle + r\langle Ja^* J\Delta^{-1/2}\xi, \Delta^{1/2}\eta \rangle.$$

Lemma 4.1.5. *Ist D ein positiver, invertierbarer Operator auf H, $r > 0$ und $b, c \in \mathcal{L}(H)$, so dass*

$$\langle b\xi, \eta \rangle = \langle cD^{1/2}\xi, D^{-1/2}\eta \rangle + r\langle cD^{-1/2}\xi, D^{1/2}\eta \rangle$$

für $\xi, \eta \in D(D^{1/2}) \cap D(D^{-1/2})$, dann gilt

$$\langle c\xi, \eta \rangle = \int \frac{r^{it-1/2}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} \langle D^{it} b D^{-it}\xi, \eta \rangle dt \quad (\xi, \eta \in H).$$

Beweis von Lemma 4.1.4. (1) Zunächst einmal ist Δ^{-1} positiv, so dass $0 \notin \mathrm{Sp}(\Delta^{-1} + r\mathbf{1})$; somit ist $(\Delta^{-1} + r\mathbf{1})^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Ferner gilt $\mathrm{Bild}(\Delta^{-1} + r\mathbf{1})^{-1} = D(\Delta^{-1}) = D(SF) \subseteq D(F)$, somit ist $\zeta_0 := F\eta_0$ definiert. Wir betrachten die dicht definierten Operatoren

$$A_0 : \mathcal{M}\xi_0 \to H, y\xi_0 \mapsto y\eta_0 \quad \text{und} \quad C_0 : \mathcal{M}\xi_0 \to H, y\xi_0 \mapsto y\zeta_0 \quad (y \in \mathcal{M}).$$

Für alle $y, z \in \mathcal{M}$ gilt dann $\langle A_0 y\xi_0, z\xi_0 \rangle = \langle y\eta_0, z\xi_0 \rangle = \langle \eta_0, y^* z\xi_0 \rangle = \langle \eta_0, Sz^* y\xi_0 \rangle = \langle z^* y\xi_0, F\eta_0 \rangle = \langle y\xi_0, z\zeta_0 \rangle = \langle y\xi_0, C_0 z\xi_0 \rangle$, so dass $A_0^* \supseteq C_0$. Damit ist A_0^* dicht definiert und A_0 abschließbar.

Ist $u \in \mathcal{M}$, u unitär, so gilt $uD(A_0) = D(A_0) = \mathcal{M}\xi_0$ und $A_0 uy\xi_0 = uy\eta_0 = uA_0 y\xi_0$, so dass $A_0 u = uA_0$. Damit ist $u^* A_0 u = A_0$ und für $A := \overline{A_0}$ gilt $u^* A u = A$; also ist A affiliiert mit $\mathcal{M}'$. Ferner gilt $A\xi_0 = A_0 \mathbf{1}\xi_0 = \mathbf{1}\eta_0 = \eta_0$ und wenn wir noch zeigen, dass A beschränkt ist, folgt (1) mit $a := A \in \mathcal{M}'$.

Es sei $A = vB$ die Polarzerlegung, dann ist $v^* v$ die Projektion auf $[\mathrm{Bild}\, B]$, so dass $v^* vB = B$. Wir zeigen, dass B (und somit A) beschränkt ist. Angenommen, dies sei nicht der Fall. Besitzt B die Spektralschar $\{e_\lambda\}$, so existieren dann $\mu > \lambda > \frac{\|x\|}{2\sqrt{r}}$, so dass $b := Be \neq 0$, wobei $e := e_\mu - e_\lambda$. Es sind $v, b, e \in \mathcal{M}'$ und es gilt $b = Be \supseteq eB$. Ferner gilt (siehe Proposition 2.1.4, (2c))

$$y\zeta_0 = C_0 y\xi_0 = A^* y\xi_0 = Bv^* y\xi_0 \text{ für alle } y \in \mathcal{M}, \quad \text{insb. } \zeta_0 = Bv^*\xi_0.$$

Wir zeigen $e\zeta_0 = 0$. Zunächst ist $xe\zeta_0 = xeBv^*\xi_0 = xbv^*\xi_0 = bv^* x\xi_0$, und es folgt

$$\|xe\zeta_0\|^2 = \|bv^* x\xi_0\|^2 = \|bv^*(\Delta^{-1} + r\mathbf{1})\eta_0\|^2 \geq 4r\, \mathrm{Re}\langle bv^*\Delta^{-1}\eta_0, bv^*\eta_0 \rangle,$$

wegen $\|\xi + \eta\|^2 \geq \|\xi + \eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle \xi, \eta \rangle$ für $\xi, \eta \in H$. Weiterhin gilt $\langle bv^*\Delta^{-1}\eta_0, bv^*\eta_0 \rangle = \langle \Delta^{-1}\eta_0, vb^2 v^*\eta_0 \rangle = \langle SF\eta_0, vb^2 v^* vB\xi_0 \rangle = \langle Fvb^3\xi_0, F\eta_0 \rangle = \langle b^3 v^*\xi_0, \zeta_0 \rangle = \langle b^2 Bv^*\xi_0, \zeta_0 \rangle = \langle b^2\zeta_0, \zeta_0 \rangle$, und somit gilt

$$\|x\|^2 \|e\zeta_0\|^2 \geq \|xe\zeta_0\|^2 \geq 4r\, \mathrm{Re}\langle b^2\zeta_0, \zeta_0 \rangle \geq 4r\lambda^2 \|e\zeta_0\|^2,$$

da $b^2 = B^2 e \geq \lambda^2 e$. Wegen $4r\lambda^2 > \|x\|^2$ muss $e\zeta_0 = 0$ sein.

Damit gilt $0 = ye\zeta_0 = ey\zeta_0 = eBv^* y\xi_0 = bv^* y\xi_0$ für alle $y \in \mathcal{M}$, so dass $bv^* = 0$. Damit ist $b = v^* vb = v^*(bv^*)^* = 0$, ein Widerspruch.

(2) Es sei $\xi, \eta \in D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$. Wir zeigen die Behauptung zunächst für den Fall $\xi = b\xi_0$, $\eta = c\xi_0$ mit $b, c \in \mathcal{M}'$. Wegen $x\xi_0 = (\Delta^{-1} + r\mathbf{1})a\xi_0 = SFa\xi_0 + ra\xi_0 = Sa^*\xi_0 + ra\xi_0$ ist (beachte Lemma 4.1.2)

$$\begin{aligned}
\langle xb\xi_0, c\xi_0\rangle &= \langle x\xi_0, b^* c\xi_0\rangle \\
&= \langle Sa^*\xi_0, b^* c\xi_0\rangle + r\langle a\xi_0, b^* c\xi_0\rangle \\
&= \langle Fb^* c\xi_0, a^*\xi_0\rangle + r\langle ba\xi_0, c\xi_0\rangle \\
&= \langle b\xi_0, ca^*\xi_0\rangle + r\langle Fa^* b^*\xi_0, c\xi_0\rangle \\
&= \langle b\xi_0, FaFc\xi_0\rangle + r\langle Fa^* Fb\xi_0, c\xi_0\rangle \\
&= \langle b\xi_0, \Delta^{1/2} JaJ\Delta^{-1/2} c\xi_0\rangle + r\langle \Delta^{1/2} Ja^* J\Delta^{-1/2} b\xi_0, c\xi_0\rangle \\
&= \langle Ja^* J\Delta^{1/2} b\xi_0, \Delta^{-1/2} c\xi_0\rangle + r\langle Ja^* J\Delta^{-1/2} b\xi_0, \Delta^{1/2} c\xi_0\rangle.
\end{aligned}$$

Es folgt (2) für beliebige $\xi, \eta \in D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$ mit folgendem Approximationsargument: Für alle $\xi \in D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$ existiert eine Folge $(b_n) \subseteq \mathcal{M}'$ mit $b_n\xi_0 \in D(\Delta^{1/2}) \cap D(\Delta^{-1/2})$, so dass

$$b_n\xi_0 \longrightarrow \xi, \quad \Delta^{1/2} b_n\xi_0 \longrightarrow \Delta^{1/2}\xi, \quad \Delta^{-1/2} b_n\xi_0 \longrightarrow \Delta^{-1/2}\xi.$$

Für den Beweis wähle zunächst eine Folge $(y_n) \subseteq \mathcal{M}$ mit $y_n^*\xi_0 \longrightarrow J\Delta^{-1/2}\xi + J\Delta^{1/2}\xi$. Dann gilt $\Delta^{1/2} y_n\xi_0 = J^2\Delta^{1/2} y_n\xi_0 = JSy_n\xi_0 = Jy_n^*\xi_0$ und somit

$$\Delta^{1/2} y_n\xi_0 \longrightarrow \Delta^{-1/2}\xi + \Delta^{1/2}\xi = (\Delta^{-1} + \mathbf{1})\Delta^{1/2}\xi$$

(beachte, dass $\Delta^{1/2}\xi \in D(\Delta^{-1}) = D(\Delta^{-1/2}\Delta^{-1/2})$).

Es sei $0 \leq t \leq 1$, dann ist $f(\lambda) := \lambda^{1-t}/(1 + \lambda)$ auf $[0, \infty)$ beschränkt und damit $\Delta^{-t}(\Delta^{-1} + \mathbf{1})^{-1} = f(\Delta) \in \mathcal{L}(H)$, so dass

$$\Delta^{-t}(\Delta^{-1} + \mathbf{1})^{-1}\Delta^{1/2} y_n\xi_0 \longrightarrow \Delta^{1/2-t}\xi;$$

ferner gilt $(\Delta^{-1}+\mathbf{1})^{-1}\Delta^{1/2} \subseteq \Delta^{1/2}(\Delta^{-1}+\mathbf{1})^{-1}$. Wähle nun nach (1) $b_n \in \mathcal{M}'$ mit $b_n\xi_0 = (\Delta^{-1} + \mathbf{1})^{-1} y_n\xi_0$, dann gilt $b_n\xi_0 \in (\Delta^{-1} + \mathbf{1})^{-1} D(S) = (\Delta^{-1} + \mathbf{1})^{-1} D(\Delta^{1/2}) \subseteq D(\Delta^{1/2})$ und $b_n\xi_0 \in D(F) = D(\Delta^{-1/2})$. Es folgt

$$\Delta^{1/2-t} b_n\xi_0 = \Delta^{-t}\Delta^{1/2}(\Delta^{-1} + \mathbf{1})^{-1} y_n\xi_0 = \Delta^{-t}(\Delta^{-1} + \mathbf{1})^{-1}\Delta^{1/2} y_n\xi_0 \longrightarrow \Delta^{1/2-t}\xi,$$

und mit $t = \frac{1}{2}$, $t = 0$ und $t = 1$ die Behauptung. □

Beweis von Lemma 4.1.5. Für $r, s > 0$ beweisen wir zunächst

$$\int_{\mathbb{R}} f_r(t) s^{it} dt = \frac{1}{s^{-1/2} + rs^{1/2}}, \text{ wobei } f_r(t) := \frac{r^{it-1/2}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}.$$

Es definiert

$$g(z) := \frac{s^{iz}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}} \text{ für } z \notin \mathbb{Z}i$$

eine holomorphe Funktion mit einfachem Pol in $z = 0$. Dort ist das Residuum $\mathrm{Res}(g, 0) = \frac{zs^{iz}}{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}|_{z=0} = \frac{zs^{iz}}{2(\pi z + (\pi z)^3/3! + \dots)}|_{z=0} = \frac{1}{2\pi}$, ferner gilt $|g(z)| \longrightarrow 0$ für $|\operatorname{Re} z| \longrightarrow \infty$ und $|\operatorname{Im} z|$ beschränkt. Betrachten wir das Wegintegral um das Rechteck mit Punkten $\pm R \pm \frac{1}{2}i$, so ergibt sich mit $R \longrightarrow \infty$ nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} i = 2\pi i \frac{1}{2\pi} &= \int_{\mathbb{R}} g(t - \tfrac{1}{2}i)dt - \int_{\mathbb{R}} g(t + \tfrac{1}{2}i)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{s^{it}s^{1/2}}{e^{\pi t}e^{-\frac{1}{2}\pi i} - e^{-\pi t}e^{\frac{1}{2}\pi i}} - \frac{s^{it}s^{-1/2}}{e^{\pi t}e^{\frac{1}{2}\pi i} - e^{-\pi t}e^{-\frac{1}{2}\pi i}} dt \\ &= i(s^{1/2} + s^{-1/2}) \int_{\mathbb{R}} \frac{s^{it}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} dt \end{aligned}$$

(beachte $e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$, $e^{-\frac{1}{2}\pi i} = -i$). Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{s^{it}}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}} dt = \frac{1}{s^{1/2} + s^{-1/2}}.$$

Ersetzen wir hier s durch rs und dividieren dann durch $r^{1/2}$, so ergibt sich die Behauptung.

Um nun das Lemma zu beweisen, müssen wir unter den Voraussetzungen

$$\langle c\xi, \eta \rangle = \int f_r(t) \langle D^{it} b D^{-it} \xi, \eta \rangle dt \quad (\xi, \eta \in H)$$

zeigen. Hierzu sei zunächst bemerkt, dass die Abbildung $t \mapsto D^{it}$ stark-Operator stetig ist (Bemerkung nach Lemma 2.8.1), so dass auch $t \mapsto D^{it} b D^{-it}$ stark-Operator stetig ist; damit ist $t \mapsto \langle D^{it} b D^{-it} \xi, \eta \rangle$ stetig und beschränkt, und somit ist das Integral definiert.

Fall 1. Es sei $D =: d = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j$, wobei $\lambda_j > 0$ und die e_j zueinander orthogonale Projektionen seien. Wegen $d \in \mathcal{L}(H)$ folgt nach Voraussetzung

$$b = d^{-1/2} c d^{1/2} + r d^{1/2} c d^{-1/2} = \sum_{j,k=1}^{n} (\lambda_j^{-1/2} \lambda_k^{1/2} + r \lambda_j^{1/2} \lambda_k^{-1/2}) e_j c e_k,$$

und damit $c = \sum_{j,k=1}^n e_j c e_k = \sum_{j,k=1}^m ((\frac{\lambda_j}{\lambda_k})^{-1/2} + r(\frac{\lambda_j}{\lambda_k})^{1/2})^{-1} e_j b e_k$, so dass nach der vorhin bewiesenen Integralformel

$$\begin{aligned} \langle c\xi, \eta \rangle &= \sum_{j,k=1}^{m} \langle e_j b e_k \xi, \eta \rangle \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_k} \right)^{it} f_r(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_r(t) \sum_{j,k=1}^{m} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_k} \right)^{it} \langle e_j b e_k \xi, \eta \rangle dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_r(t) \langle d^{it} b d^{-it} \xi, \eta \rangle dt \end{aligned}$$

für alle $\xi, \eta \in H$, wie gewünscht.

Fall 2. Es sei $D =: d \in \mathcal{L}(H)$ mit $\lambda\mathbf{1} \leq d \leq \mu\mathbf{1}$ für gewisse $\lambda, \mu > 0$. Nach Lemma 1.5.3 existiert eine Folge (d_n) mit d_n wie im Fall 1 und $\lambda\mathbf{1} \leq d_n \leq \mu\mathbf{1}$, so dass $d_n \longrightarrow d$ in Norm. Nach dem Beweis von Lemma 1.5.3 liegen die d_n in der von d erzeugten, kommutativen von Neumann-Algebra. Da wir diese Algebra (via der Gelfand-Transformation) als Algebra von Funktionen darstellen können und die Potenzfunktion f_z gleichmäßig stetig auf $[\lambda, \mu]$ ist, folgt $d_n^z = f_z(d_n) \longrightarrow f_z(d) = d^z$, für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit ist

$$b_n := d_n^{-1/2} c d_n^{1/2} + r d_n^{1/2} c d_n^{-1/2} \longrightarrow d^{-1/2} c d^{1/2} + r d^{1/2} c d^{-1/2} = b.$$

Nach Fall 1 gilt $\langle c\xi, \eta\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_r(t) \langle d_n^{it} b_n d_n^{-it} \xi, \eta\rangle dt$ für alle $\xi, \eta \in H$, und so folgt wegen $d_n^{it} b_n d_n^{-it} \longrightarrow d^{it} b d^{-it}$ und des Grenzwertsatzes von Lebesgue die Behauptung.

Fall 3. Es sei nun D positiv und invertierbar, sowie $\{e_\lambda\}$ die Spektralschar zu D. Nach Lemma 2.6.7 ist dann $e_0 = \chi_{(-\infty,0]}(D) = \chi_\emptyset(D) = 0$. Betrachten wir $f_n := e_n - e_{1/n}$ für $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\vee_n f_n = \vee_n e_n - \wedge_n e_{1/n} = \mathbf{1} - e_0 = \mathbf{1}$.

Es sei $K_n := f_n(H)$ und $d_0 := D|_{K_n}$, $b_0 := f_n b f_n|_{K_n}$ und $c_0 := f_n c f_n|_{K_n}$. Dann gilt $\frac{1}{n}\mathbf{1}_{K_n} \leq d_0 \leq n\mathbf{1}_{K_n}$; für alle $\xi, \eta \in H$ gilt außerdem $f_n\xi, f_n\eta \in D(D^{1/2}) \cap D(D^{-1/2})$, so dass nach Voraussetzung

$$\langle b_0 f_n \xi, f_n \eta\rangle = \langle c_0 d_0^{1/2} f_n \xi, d_0^{-1/2} f_n \eta\rangle + r\langle c_0 d_0^{-1/2} f_n \xi, d_0^{1/2} f_n \eta\rangle.$$

Nach Fall 2 gilt nun $\langle c_0\xi, \eta\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_r(t)\langle d_0^{it} b_0 d_0^{-it}\xi, \eta\rangle dt$ für alle $\xi, \eta \in K_n$, und somit (siehe Lemma 2.6.5) $\langle c f_n \xi, f_n \eta\rangle = \int_{\mathbb{R}} f_r(t)\langle D^{it} b D^{-it} f_n\xi, f_n\eta\rangle dt$ für alle $\xi, \eta \in H$. Mit $n \longrightarrow \infty$ folgt die Behauptung, wegen des Grenzwertsatzes von Lebesgue. □

Wir haben nun $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} \subseteq J\mathcal{M}'J$ für alle $t \in \mathbb{R}$ bewiesen. Mit $t = 0$ folgt $\mathcal{M} \subseteq J\mathcal{M}'J$ bzw. $J\mathcal{M}J \subseteq \mathcal{M}'$. Um $J\mathcal{M}'J \subseteq \mathcal{M}$ zu zeigen, sei $a \in \mathcal{M}'$. Wir zeigen dann $JaJ \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$, d. h. $JaJb = bJaJ$ für alle $b \in \mathcal{M}'$.

Zunächst zeigen wir $JcJd\xi_0 = dJcJ\xi_0$ für alle $c, d \in \mathcal{M}'$: Für alle $x \in \mathcal{M}$ ist $Jx^*J \in \mathcal{M}'$, und wegen von $J\xi_0 = \xi_0$, sowie $FJ = \Delta^{1/2} = JS$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\langle JcJd\xi_0, x\xi_0\rangle &= \langle c^*Jx(J)\xi_0, Jd\xi_0\rangle = \langle FJx^*Jc\xi_0, Jd\xi_0\rangle \\
&= \langle JSx^*Jc\xi_0, JFd^*\xi_0\rangle = \langle Fd^*\xi_0, Sx^*Jc\xi_0\rangle \\
&= \langle x^*Jc\xi_0, d^*\xi_0\rangle = \langle Jc(J)\xi_0, xd^*\xi_0\rangle = \langle dJcJ\xi_0, x\xi_0\rangle,
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt wegen der Dichtheit von $\mathcal{M}\xi_0$ in H.

Für alle $a, b, c \in \mathcal{M}'$ folgt damit $Ja(JbJc\xi_0) = Ja(cJbJ\xi_0) = JacJb\xi_0 = bJacJ\xi_0 = bJaJJc\xi_0$, also $JaJb = bJaJ$, weil $J\mathcal{M}'\xi_0$ dicht ist in H.

Wir schließen $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} \subseteq J\mathcal{M}'J \subseteq \mathcal{M}$ für alle $t \in \mathbb{R}$; und wenn wir t durch $-t$ ersetzen, folgern wir $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M}$. Der Beweis von Tomitas Satz ist damit abgeschlossen.

4.2. Modulare Automorphismusgruppe und KMS-Bedingung

Modulare Automorphismusgruppe

Definition. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und* $\mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ *die Gruppe aller *-Automorphismen. Eine (einparametrige)* Automorphismusgruppe *ist eine Familie $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$, so dass $\alpha_{s+t} = \alpha_s \circ \alpha_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Die Automorphismusgruppe heißt* stetig, *falls $t \mapsto \alpha_t(x)$ stark-Operator stetig für alle $x \in \mathcal{M}$ ist.*

Der Satz von Tomita rechtfertigt folgende Definition:

Definition. *Es besitze $\mathcal{M}$ einen zyklischen und separierenden Vektor ξ_0 und es sei Δ der modulare Operator. Die Abbildung*

$$\sigma : \ \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{M}), \quad t \mapsto \sigma_t \ \textit{mit}\ \sigma_t(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$$

definiert eine stetige, einparametrige Automorphismusgruppe $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$. Sie wird als modulare Automorphismusgruppe *zu ξ_0 bezeichnet.*

KMS-Bedingung

Definition. *Eine einparametrige Gruppe $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ erfüllt die* KMS-Bedingung *(Kubo-Martin-Schwinger) bezüglich eines Zustands φ, falls für alle $x, y \in \mathcal{M}$ eine komplexwertige stetige, beschränkte Funktion f auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 1\}$, holomorph im Inneren, existiert, mit*

$$f(t) = \varphi(\alpha_t(x)y), \quad f(t+i) = \varphi(x\alpha_t(y)) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Bevor wir auf den Zusammenhang zwischen modularer Automorphismusgruppe und KMS-Bedingung eingehen, ziehen wir einige Folgerungen aus der KMS-Bedingung.

Proposition 4.2.1. *Es erfülle $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ die KMS-Bedingung bezüglich φ und es sei $x \in \mathcal{M}$. Dann gilt*

(1) *$\varphi(\alpha_t(x)) = \varphi(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$,*

(2) *falls $\alpha_t(x) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ für alle $y \in \mathcal{M}$,*

(3) *ist φ treu und $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ für alle $y \in \mathcal{M}$, so ist $\alpha_t(x) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Für den Beweis benutzen wir, dass eine auf einem Gebiet $U \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktion, die auf $U \setminus G$ holomorph ist, wobei G eine Gerade ist, automatisch auf ganz U holomorph ist. Diese Tatsache folgt leicht aus dem Satz von Morera.

Beweis. Als Vorbemerkung, sei $x \in \mathcal{M}$. Ist $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ für alle $y \in \mathcal{M}$, so gilt $\varphi(x\alpha_t(y)) = \varphi(xy)$ für alle $y \in \mathcal{M}$ und $t \in \mathbb{R}$:

Aus der Voraussetzung folgt nämlich $\varphi(x\alpha_t(y)) = \varphi(\alpha_t(y)x)$ für alle $y \in \mathcal{M}$ und $t \in \mathbb{R}$, also gilt für die Funktion f aus der KMS-Bedingung $f(t) = f(t+i)$. Man kann daher f zu einer stetigen, beschränkten Funktion auf $\mathbb{C}$ mit Periode i fortsetzen; da diese Fortsetzung bis auf diskrete Geraden holomorph ist, ist sie auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und nach dem Satz von Liouville somit konstant. Da f also konstant ist folgt $\varphi(x\sigma_t(y)) = f(t) = f(0) = \varphi(xy)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(1) Mit $x = \mathbf{1}$ folgt nach der Vorbemerkung $\varphi(\alpha_t(y)) = \varphi(y)$ für alle $y \in \mathcal{M}$ und $t \in \mathbb{R}$.

(2) Für alle $y \in \mathcal{M}$ ist die Funktion f aus der KMS-Bedingung nun konstant auf $\mathbb{R}$ und o. E. dort reellwertig. Wir wenden nun das Schwarz'sche Spiegelungsprinzip an, um f auf einem Gebiet fortzusetzen, welches $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z < 1\}$ enthält. Nach dem Identitätssatz muss dann f konstant auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ sein, so dass $\varphi(xy) = f(0) = f(1) = \varphi(yx)$ gilt.

(3) Nach (1) und der Vorbemerkung folgt $\varphi(\alpha_t(x)\alpha_t(y)) = \varphi(\alpha_t(xy)) = \varphi(xy) = \varphi(x\alpha_t(y))$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathcal{M} = \alpha_t^{-1}(\mathcal{M})$, d. h. $\varphi((\alpha_t(x) - x)z) = 0$ für alle $z \in \mathcal{M}$. Insbesondere ist $\varphi((\alpha_t(x) - x)(\alpha_t(x) - x)^*) = 0$ und somit $\alpha_t(x) = x$, weil φ treu ist. □

Wir werden nachfolgend zeigen, dass die modulare Automorphismusgruppe $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine KMS-Bedingung erfüllt; hierfür benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 4.2.2. *Es sei A ein positiver, invertierbarer Operator auf H, sowie $\xi, \eta \in D(A^{1/2})$. Dann definiert $f(z) := \langle A^z\xi, \eta\rangle$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$ eine stetige und beschränkte Funktion, die holomorph im Inneren ist.*

Beweis. Unter Benutzung von Polarisation reicht es, den Fall $\xi = \eta \in D(A^{1/2})$ zu betrachten. Es sei $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die Spektralschar zu A; im Folgenden werden wir mehrmals Proposition 2.6.3, (3), benutzen.

Es ist $D(A^z) = \{\xi \in H \mid \int_{(0,\infty)} |\lambda|^{2z} d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle < \infty\}$ für $z \in \mathbb{C}$, und wegen $\xi \in D(A^{1/2})$ gilt

$$\int_{(0,\infty)} (1 + \lambda) d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle < \infty. \tag{$*$}$$

Ist nun $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$, so gilt $|\lambda|^{2z} = \lambda^{2\operatorname{Re} z} \leq 1 + \lambda$; nach $(*)$ ist also $\xi \in D(A^z)$, und $f(z)$ ist definiert. Wegen $f(z) = \langle A^z\xi, \xi\rangle = \int_{[0,\infty)} \lambda^z d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle$ und $|\lambda^z| = \lambda^{\operatorname{Re} z} \leq 1 + \lambda$ folgt, wieder wegen $(*)$, die Beschränktheit von f auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$.

Wir betrachten nun die Funktion $f_n(z) := \int_{[\frac{1}{n},n]} \lambda^z d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $\lambda > 0$ ist $z \mapsto \lambda^z = \exp(z \log \lambda)$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die eine Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\lambda) z^k$ besitzt, die gleichmäßig in $\lambda \in [\frac{1}{n}, n]$ konvergiert. Es folgt

$$f_n(z) = \int_{[\frac{1}{n},n]} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(\lambda) z^k d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{[\frac{1}{n},n]} \beta_k(\lambda) d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle \right) z^k,$$

und somit ist f_n holomorph auf $\mathbb{C}$.

Für $z \in \mathbb{C}$ mit $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$ gilt wegen $(*)$

$$|f(z) - f_n(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}\setminus[\frac{1}{n},n]} \lambda^z d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle \right| \leq \int_{(0,\frac{1}{n})\cup(n,\infty)} (1 + \lambda) d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle \longrightarrow 0,$$

so dass (f_n) auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Es folgt, dass f stetig auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}\}$ und holomorph im Inneren ist. □

Satz 4.2.3. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra mit separierendem und zyklischem Vektor ξ_0. Die modulare Automorphismus-Gruppe $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ zu ξ_0 erfüllt die KMS-Bedingung bezüglich des Vektorzustands ω_{ξ_0}.*

Beweis. Zu $x, y \in \mathcal{M}$ definiere

$$f(z) := \begin{cases} \langle \Delta^{-iz} y\xi_0, x^*\xi_0\rangle & \text{für } 0 \le \operatorname{Im} z \le \frac{1}{2} \\ \langle \Delta^{1+iz} x\xi_0, y^*\xi_0\rangle & \text{für } \frac{1}{2} \le \operatorname{Im} z \le 1 \end{cases}.$$

Wir zeigen, dass die beiden Definitionen auf $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}$ übereinstimmen. Sei dazu $z = t + \frac{1}{2}i$ mit $t \in \mathbb{R}$, dann gilt (siehe Lemma 4.1.2)

$$\begin{aligned} \langle \Delta^{-it+1/2} y\xi_0, x^*\xi_0\rangle &= \langle \Delta^{-it} JSy\xi_0, Sx\xi_0\rangle = \langle J\Delta^{-it} y^*\xi_0, J\Delta^{1/2} x\xi_0\rangle \\ &= \langle \Delta^{1/2} x\xi_0, \Delta^{-it} y^*\xi_0\rangle = \langle \Delta^{it+1/2} x\xi_0, y^*\xi_0\rangle. \end{aligned}$$

Auf beiden Teilen ist f beschränkt, stetig und holomorph im Inneren. Es folgt, dass f holomorph im Inneren von $\{z \in \mathbb{C} :\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\}$ ist, und es ist (beachte $\Delta^{\pm it}\xi_0 = \xi_0$, nach Lemma 2.6.6)

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle \Delta^{-it} y\xi_0, x^*\Delta^{-it}\xi_0\rangle = \langle \Delta^{it} x\Delta^{-it} y\xi_0, \xi_0\rangle = \omega_{\xi_0}(\sigma_t(x)y), \\ f(t+i) &= \langle \Delta^{it} x\xi_0, y^*\xi_0\rangle = \langle y\Delta^{it} x\Delta^{-it}\xi_0, \xi_0\rangle = \omega_{\xi_0}(y\sigma_t(x)), \end{aligned}$$

für $t \in \mathbb{R}$, wie gewünscht. □

Korollar 4.2.4. *Es ist $\sigma_t = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn ω_{ξ_0} eine Spur ist.*

Beweis. Nach Satz 4.2.3 erfüllt $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ die KMS-Bedinung; $\Rightarrow$ folgt dann aus Proposition 4.2.1, (2), und $\Leftarrow$ aus Proposition 4.2.1, (3). □

Bemerkung. Im vorigen Korollar kann man $\Leftarrow$ auch leicht direkt sehen. Ist ω_{ξ_0} nämlich eine Spur, so gilt $\|Sx\xi_0\|^2 = \langle x^*\xi_0, x^*\xi_0\rangle = \langle xx^*\xi_0, \xi_0\rangle = \langle x^*x\xi_0, \xi_0\rangle = \|x\xi_0\|^2$, deswegen ist S eine surjektive Isometrie, und es ist $\Delta = S^*S = \mathbf{1}$.

Charakterisierung der modularen Automorphismusgruppe

Satz 4.2.5. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra mit zyklischem und separierendem Vektor ξ_0, $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ die modulare Automorphismusgruppe zu ξ_0 und $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ eine Automorphismusgruppe, die die KMS-Bedingung bezüglich des Vektorzustands ω_{ξ_0} erfüllt. Dann gilt $\{\alpha_t\}_t = \{\sigma_t\}_t$.*

Wir beginnen mit dem *Beweis.* Nach Voraussetzung und Proposition 4.2.1, (1), gilt

$$\|\alpha_t(x)\xi_0\|^2 = \omega_{\xi_0}(\alpha_t(x^*x)) = \omega_{\xi_0}(x^*x) = \|x\xi\|^2 \quad (x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}),$$

somit ist die Abbildung $\mathcal{M}\xi_0 \to \mathcal{M}\xi_0$, $x\xi_0 \mapsto \alpha_t(x)\xi_0$ eine lineare Isometrie, mit dichtem Bild $\mathcal{M}\xi_0$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert daher $u_t \in \mathcal{L}(H)$, u_t unitär, mit

$$\alpha_t(x)\xi_0 = u_t x\xi_0 \quad (x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt $\alpha_t(x)u_t y\xi_0 = \alpha_t(x)\alpha_t(y)\xi_0 = \alpha_t(xy)\xi_0 = u_t xy\xi_0$ für alle $x, y \in \mathcal{M}$, und somit $\alpha_t(x)u_t = u_t x$, d. h.

$$\alpha_t(x) = u_t x u_t^* \quad (x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}).$$

Wir zeigen nun, dass $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine stetige unitäre Gruppe ist. Wegen $u_{s+t}x\xi_0 = \alpha_{s+t}(x)\xi_0 = \alpha_s(\alpha_t(x))\xi_0 = u_s\alpha_t(x)\xi_0 = u_s u_t x\xi_0$ für $x \in \mathcal{M}$ folgt $u_{s+t} = u_s u_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Weiterhin impliziert die KMS-Bedingung, dass die Funktion $t \mapsto \omega_{\xi_0}(x^*\alpha_t(x))$ stetig ist, für alle $x \in \mathcal{M}$. Deswegen hängt $\langle x^*\alpha_t(x)\xi_0, \xi_0\rangle = \langle x^* u_t x\xi_0, \xi_0\rangle = \langle u_t x\xi_0, x\xi_0\rangle$ stetig von t ab, und somit gilt

$$\lim_{t\to 0} \|(u_t - \mathbf{1})x\xi_0\|^2 = \lim_{t\to 0}\langle(2\cdot\mathbf{1} - u_{-t} - u_t)x\xi_0, x\xi_0\rangle = 0.$$

Es folgt, dass $t \mapsto u_t\xi$ für alle $\xi \in H$ stetig ist (und somit ist auch die Automorphismgruppe $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ stetig).

Nach dem Satz von Stone existiert ein selbstadjungierter Operator A auf H, so dass $u_t = e^{itA}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Der Beweis ist abgeschlossen, wenn wir $e^A = \Delta$ zeigen; dann ist nämlich $u_t = (e^A)^{it} = \Delta^{it}$ und somit $\alpha_t(x) = u_t x u_t^* = \Delta^{it}x\Delta^{-it} = \sigma_t(x)$, für alle $x \in \mathcal{M}$, $t \in \mathbb{R}$.

Für den Abschluss des Beweises werden einige Techniken der Fourier-Analysis benutzt. Es bezeichne $C_c(\mathbb{R})$ die Menge aller komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Für alle $g \in C_c(\mathbb{R})$ definiert

$$\check{g}(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda z}g(\lambda)d\lambda \quad (z \in \mathbb{C})$$

eine Funktion $\check{g}$, die die inverse Fourier-Transformation fortsetzt. Durch Differentiation unter dem Integral sieht man leicht, dass $\check{g}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist; außerdem ist $|\check{g}(t+is)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda s}|g(\lambda)|d\lambda$ auf jedem Gebiet mit beschränktem Imaginärteil beschränkt. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \{g \in C_c(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} |\check{g}(t+is)|dt < \infty \text{ für alle } s \in \mathbb{R}\}, \quad \check{\mathcal{F}} := \{\check{g} \mid g \in \mathcal{F}\}.$$

Es sei $k \in \check{\mathcal{F}}$, $k = \check{g}$ mit $g \in \mathcal{F}$, sowie $\widehat{k}$ die Fourier-Transformierte von k. Dann gilt $\widehat{k} = g$, nach dem Umkehrsatz der Fourier-Analysis.

Für alle $k \in L_1(\mathbb{R})$ und $x \in \mathcal{M}$ definiert

$$\langle x_k\xi, \eta\rangle := \int_{\mathbb{R}} k(t)\langle\alpha_t(x)\xi, \eta\rangle dt \quad (\xi, \eta \in H)$$

einen Operator $x_k \in \mathcal{M}$: Denn die rechte Seite ist eine beschränkte Sesquilinearform, so dass $x_k \in \mathcal{L}(H)$ definiert ist. Ist weiterhin ω ein schwach-Operator stetiges Funktional auf $\mathcal{L}(H)$ mit $\omega|_{\mathcal{M}} = 0$, so ist ω von der Form $\sum_{j=1}^n\langle\cdot\xi_j, \eta_j\rangle$ $(\xi_j, \eta_j \in H)$ und es folgt $\omega(x_k) = \int_{\mathbb{R}} k(t)\omega(\alpha_t(x))dt = 0$; es ist somit $x_k \in \mathcal{M}$.

Das folgende Lemma liefert eine neue Interpretation des modularen Operators.

Lemma 4.2.6. *Es seien $\mathcal{M}$ und ξ_0 wie vorhin, Δ der zugehörige modulare Operator, sowie $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ eine Automorphisgruppe, die die KMS-Bedingung erfüllt. Für alle $k, l \in \check{\mathcal{F}}$ mit $k(z) = l(z+i)$ $(z \in \mathbb{C})$ gilt*

$$x_l\xi_0 \in D(\Delta) \text{ und } \Delta x_l\xi_0 = x_k\xi_0.$$

Beweis. Es sei f eine stetige, beschränkte Funktion auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$, holomorph im Inneren, und γ ein Weg um das Reckteck mit den Ecken $\pm R$ und $\pm R + i$ $(R > 0)$. Da l holomorph ist, folgt

$$0 = \int_\gamma l(z)f(z)dz = \int_{-R}^{R} l(t)f(t)dt - \int_{-R}^{R} l(t+i)f(t+i)dt + i\varepsilon(z),$$

wobei $\varepsilon(z) := \int_0^1 l(R+is)f(R+is)ds - \int_0^1 l(-R+is)f(-R+is)ds$. Wegen $l \in \check{F}$ ist l beschränkt auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$, und außerdem gilt $\lim_{t\to\infty} l(\pm t + is) = 0$, da $\int_{\mathbb{R}} |l(t+is)|dt < \infty$, für alle $0 \leq s \leq 1$. Nach dem Grenzwertsatz von Lebesgue gilt somit $\varepsilon(z) \longrightarrow 0$ für $R \longrightarrow \infty$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}} l(t)f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} l(t+i)f(t+i)dt.$$

Sind $x, y \in \mathcal{M}$ und f die Funktion aus der KMS-Bedingung, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}} l(t)\langle\alpha_t(x)y\xi_0, \xi_0\rangle dt = \int_{\mathbb{R}} k(t)\langle y\alpha_t(x)\xi_0, \xi_0\rangle dt,$$

so dass $\langle x_l y\xi_0, \xi_0\rangle = \langle x_k\xi_0, y^*\xi_0\rangle$, bzw. $\langle y\xi_0, x_l^*\xi_0\rangle = \langle x_k\xi_0, Sy\xi_0\rangle$. Damit folgt $x_k\xi_0 \in D(S^*)$ und $S^*x_k\xi_0 = x_l^*\xi_0$. Wegen $S^* = F$ folgt weiter $Fx_k\xi_0 = Sx_l\xi_0$, und so

$$\Delta x_l\xi_0 = FSx_l\xi_0 = F^2x_k\xi_0 = x_k\xi_0,$$

wie behauptet. □

Beweis von Satz 4.2.5, Fortsetzung. Mit A und Δ von vorhin ist $e^A = \Delta$ zu zeigen. Zunächst sei $x \in \mathcal{M}$ und $k \in \check{\mathcal{F}}$. Nach Proposition 2.6.3, (2) und dem Satz von Fubini gilt $\langle\widehat{k}(A)\xi, \xi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{k}(\lambda)d\mu_\xi = \int_{\mathbb{R}} k(t)\int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda}d\mu_\xi dt = \int_{\mathbb{R}} k(t)\langle e^{itA}\xi, \xi\rangle dt$ für $\xi \in H$. Durch Polarisation, und wegen $\alpha_t(x)\xi_0 = u_t x\xi_0 = e^{itA}x\xi_0$ erhalten wir $\langle\widehat{k}(A)x\xi_0, \eta\rangle = \int_{\mathbb{R}} k(t)\langle e^{itA}x\xi_0, \eta\rangle dt = \langle x_k\xi_0, \eta\rangle$ für $\eta \in H$ und somit

$$x_k\xi_0 = \widehat{k}(A)x\xi_0.$$

Es seien $k, l \in \check{\mathcal{F}}$ mit $k(z) = l(z+i)$ $(z \in \mathbb{C})$. Nach obigem Lemma folgt $\Delta\widehat{l}(A)x\xi_0 = \Delta x_l\xi_0 = x_k\xi_0 = \widehat{k}(A)x\xi_0$, und wegen $e^{-\lambda}\widehat{k}(\lambda) = \widehat{l}(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ folgt weiter $\Delta e^{-A}\widehat{k}(A)x\xi_0 = \widehat{k}(A)x\xi_0$. Schreiben wir $k = \check{g}$ mit $g \in \mathcal{F}$, so folgt $\widehat{k} = g$, und wir haben

$$e^{-A}g(A)x\xi_0 = \Delta^{-1}g(A)x\xi_0 \quad (g \in \mathcal{F}, x \in \mathcal{M}).$$

Es gilt $g(A) \in \mathcal{L}(H)$ und $e^{-A}g(A) \in \mathcal{L}(H)$, ferner ist $\Delta^{-1}g(A)$ abgeschlossen (siehe Proposition 2.1.4, (2a)), so dass $\Delta^{-1}g(A) \in \mathcal{L}(H)$; es folgt

$$e^{-A}g(A) = \Delta^{-1}g(A) \quad (g \in \mathcal{F}).$$

Wir leiten nun daraus $e^{-A} = \Delta^{-1}$ her, so dass $e^{A} = \Delta$ folgt. Sei hierzu $n \in \mathbb{N}$ und

$$g_n(\lambda) := \begin{cases} 1 - \frac{|\lambda|}{n} & \text{für } |\lambda| \leq n \\ 0 & \text{für } |\lambda| > n. \end{cases}$$

Dann ist $g_n(\lambda) = g_n(-\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und somit (partielle Integration)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda z} g_n(\lambda) d\lambda &= \int_0^n (1 - \tfrac{\lambda}{n}) \cos(\lambda z) d\lambda \\ &= [(1 - \tfrac{\lambda}{n})\tfrac{1}{z}\sin(\lambda z)]_0^n + \int_0^n \tfrac{1}{nz}\sin(\lambda z) d\lambda \\ &= 0 - [\tfrac{1}{nz^2}\cos(\lambda z)]_0^n = \tfrac{1}{nz^2}(1 - \cos(nz)) \end{aligned}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Es folgt $\check{g_n}(z) = \frac{1-\cos(nz)}{\pi n z^2}$ und somit $g_n \in \mathcal{F}$. Wegen $g_n \nearrow 1$ und der σ-Normalität des Borel'schen Funktionenkalküls $g \mapsto g(A)$ folgt $\mathbf{1} = \sup_n g_n(A)$, und somit $g_n(A)\xi \longrightarrow \xi$ für alle $\xi \in H$, nach Satz 1.1.2.

Für $\xi \in D(e^{-A})$ gilt also $g_n(A)\xi \longrightarrow \xi$ und $\Delta^{-1}g_n(A)\xi = e^{-A}g_n(A)\xi = g_n(A)e^{-A}\xi \longrightarrow e^{-A}\xi$, und da Δ^{-1} abgeschlossen ist, folgt $(\xi, e^{-A}\xi) \in G(\Delta^{-1})$. Wir haben also $e^{-A} \subseteq \Delta^{-1}$ gezeigt; da e^{-A} und Δ^{-1} selbstadjungiert sind, folgt $e^{-A} = \Delta^{-1}$, was zu beweisen war. □

4.3. Modulare Automorphismusgruppen zu Zuständen

Wir betrachten nun eine von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ mit einem treuen, normalen Zustand φ (dies lassen gerade die σ-endlichen von Neumann-Algebren zu, siehe Satz 1.9.2). Nach Satz 1.9.3 ist die GNS-Repräsentation $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(H_\varphi)$ ein *-Isomorphismus von $\mathcal{M}$ auf das Bild $\Phi(\mathcal{M})$ und $\Phi(\mathcal{M})$ ist eine von Neumann-Algebra mit einem zyklischen und separierenden Vektor $\xi_0 \in H_\varphi$, so dass $\omega_{\xi_0} \circ \Phi = \varphi$. Die *modulare Automorphismusgruppe* $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ von $\mathcal{M}$ zu φ sei dann definiert durch

$$\sigma_t(x) := \Phi^{-1}(\Delta^{it}\Phi(x)\Delta^{-it}) \quad (x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}).$$

Wir fassen Satz 4.2.3 und Satz 4.2.5 zusammen und formulieren sie für von Neumann-Algebren mit einem treuen, normalen Zustand:

Satz 4.3.1. *Zu einem treuen, normalen Zustand φ auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ existiert genau eine einparametrige Automorphismus-Gruppe $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, die die KMS-Bedingung bezüglich φ erfüllt; und zwar ist dies die modulare Automorphismus-Gruppe $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ zu φ.*

Bemerkung. Nach Korollar 4.2.4 ist $\sigma_t = \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ für $t \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn φ eine Spur ist.

Der nächste Satz stellt einen Zusammenhang zwischen modularen Automorphismusgruppen zu verschiedenen Zuständen her. Hierzu seien zwei treue, normale Zustände φ und ψ auf $\mathcal{M}$ gegeben, und die entsprechenden modularen Automorphismusgruppen seien mit $\{\sigma_t^\varphi\}_{t\in\mathbb{R}}$ und $\{\sigma_t^\psi\}_{t\in\mathbb{R}}$ bezeichnet.

Satz 4.3.2 (Connes)**.** *Es existiert eine stark-Operator stetige Abbildung $t \mapsto u_t$ von $\mathbb{R}$ in die unitäre Gruppe von $\mathcal{M}$, so dass*

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \text{ und } u_{s+t} = u_s \sigma_s^\varphi(u_t) \quad (x \in \mathcal{M},\ s, t \in \mathbb{R}).$$

Beweis. Es sei $M_2(\mathcal{M})$ die von Neumann-Algebra der $\mathcal{M}$-wertigen 2×2-Matrizen. Auf $M_2(\mathcal{M})$ definiere einen treuen, normalen Zustand ω durch

$$\omega((x_{jk})) := \varphi(x_{11}) + \psi(x_{22}) \quad ((x_{jk}) \in M_2(\mathcal{M}))$$

und es sei $\{\sigma_t^\omega\}_{t \in \mathbb{R}}$ die entsprechende modulare Automorphismengruppe. Es bezeichne $e_{jk} \in M_2(\mathcal{M})_{\text{proj}}$ die Matrix mit Eintrag $\mathbf{1}$ an Stelle (j,k) und 0 sonst. Dann gilt $\omega(e_{jj}a) = \omega(ae_{jj})$ für alle $a \in M_2(\mathcal{M})$, so dass $\sigma_t^\omega(e_{jj}) = e_{jj}$ nach Proposition 4.2.1, (3), und somit $\sigma_t^\omega(e_{jj}M_2(\mathcal{M})e_{kk}) = e_{jj}M_2(\mathcal{M})e_{kk}$ für alle $j,k \in \{1,2\}$ gilt. Ist $x \in \mathcal{M}$ und $a_x \in M_2(\mathcal{M})$ die Matrix mit x an der Stelle (j,k) und 0 sonst, dann ist folglich $\sigma_t^\omega(a_x)$ eine Matrix mit einem Element $y \in \mathcal{M}$ an der Stelle (i,j) und 0 sonst. Wir setzen dann $\sigma_t^{jk}(x) := y$, und erhalten so vier Abbildungen $\sigma_t^{jk} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Weil $\{\sigma_t^\omega\}$ eine Automorphismusgruppe in $M_2(\mathcal{M})$ ist, die die KMS-Bedingung für ω erfüllt, folgt durch Restriktion auf $e_{11}\mathcal{M}e_{11}$, dass $\{\sigma_t^{11}\}$ eine Automorphismusgruppe in $\mathcal{M}$ ist, die die KMS-Bedingung für φ erfüllt. Demnach ist $\sigma_t^{11} = \sigma_t^\varphi$, und analog gilt $\sigma_t^{22} = \sigma_t^\psi$, für alle $t \in \mathbb{R}$.

Es sei

$$u_t := \sigma_t^{21}(\mathbf{1}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Weil σ_t^ω ein *-Homomorphismus ist, gilt $u_t^* = \sigma_t^{12}(\mathbf{1})$. Anwendung von σ_t^ω auf

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

liefert $\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^*$ (insbesondere $\mathbf{1} = u_t u_t^*$) und $\mathbf{1} = u_t^* u_t$. Wenden wir σ_t^ω auf

$$\sigma_t^\omega\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

an, so folgt $u_{s+t} = u_s \sigma_s^\varphi(u_t)$. □

Definition. *Im Kontext von Satz 4.3.2 bezeichne*

$$(D\psi : D\varphi)_t := u_t \quad (t \in \mathbb{R})$$

die cozyklische Radon-Nikodym-Ableitung *von ψ bezüglich φ.*

5. Das gekreuzte Produkt

5.1. Tensorprodukte

Wir stellen einige Grundlagen vom Hilbertraum-Tensorprodukt und vom von Neumann-Algebra-Tensorprodukt zusammen. Die Beweise finden sich etwa in [Fil96]; eine weitere Quelle hierfür ist [KaR86], insb. Section 11.2.

Hilbertraum-Tensorprodukt

Es sei K ein Körper und V, W seien K-Vektorräume. Dann existiert (bis auf Isomorphie eindeutig) ein K-Vektorraum X mit einer bilinearen Abbildung $\varphi : V \times W \to X$, so dass alle bilinearen Abbildungen $\psi : V \times W \to U$ (U ein K-Vektorraum) eine eindeutige Faktorisierung

$$\psi = \varphi \circ T, \quad T : X \to U \text{ linear}$$

besitzen. Es wird $V \otimes_{\text{alg}} W := X$ als (algebraisches) *Tensorprodukt* von V und W bezeichnet, ferner ist $v \otimes w := \varphi(v, w)$ für $v \in V$ und $w \in W$. Es ist $V \otimes_{\text{alg}} W$ linearer Spann der *einfachen Tensoren* $v \otimes w$ $(v \in V, w \in W)$.

Es seien nun H und K stets komplexe Hilberträume.

Definition. *Es definiert*

$$\langle \xi \otimes \eta, \xi' \otimes \eta' \rangle := \langle \xi, \xi' \rangle \langle \eta, \eta' \rangle \quad (\xi, \xi' \in H, \eta, \eta' \in K)$$

ein Skalarprodukt auf $H \otimes_{\text{alg}} K$, und dessen Vervollständigung $H \otimes K$ wird als Hilbertraum-Tensorprodukt *bezeichnet.*

Offenbar gilt $\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \|\eta\|$ für alle $\xi \in H$, $\eta \in K$.

Wir werden den Hilbertraum $H \otimes K$ mit dem Hilbertraum $l_2(I, H)$ aus Abschnitt A.4 dentifizieren:

Lemma 5.1.1. *Es sei $\{\varepsilon_i\}_{i \in I}$ eine Orthonormalbasis von K. Dann definiert*

$$U : l_2(I, H) \to H \otimes K, \quad (\xi_i)_i \mapsto \textstyle\sum_{i \in I} (\xi_i \otimes \varepsilon_i) \quad ((\xi_i)_i \in l_2(I, H))$$

eine surjektive Isometrie.

Beweis. Für alle $(\xi_i)_i \in l_2(I, H)$ ist $(\xi_i \otimes \varepsilon_i)_i$ eine orthogonale Familie und

$$\|\textstyle\sum_{i \in I} (\xi_i \otimes \varepsilon_i)\|^2 = \sum_{i \in I} \|\xi_i \otimes \varepsilon_i\|^2 = \sum_{i \in I} \|\xi_i\|^2 = \|(\xi_i)_i\|^2 < \infty,$$

also ist U definiert und eine Isometrie.

Sei nun $\eta \in K$, so dass $\eta = \sum_{i\in I} \langle \eta, \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i$ mit $(\langle \eta, \varepsilon_i\rangle)_i \in l_2(I)$. Für $\xi \in H$ ist dann $(\langle \eta, \varepsilon_i\rangle \xi)_i \in l_2(I, H)$ und

$$U(\langle \eta, \varepsilon_i\rangle \xi)_i = \textstyle\sum_{i\in I}(\langle \eta, \varepsilon_i\rangle \xi \otimes \varepsilon_i) = \xi \otimes \sum_{i\in I}\langle \eta, \varepsilon_i\rangle \varepsilon_i = \xi \otimes \eta.$$

Damit enthält Bild U den linearen Spann der einfachen Tensoren, der dicht in $H \otimes K$ ist; also ist U surjektiv. ☐

Von Neumann-Algebra-Tensprodukt

Es seien A, B *-Algebren, dann definieren

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb', \quad (a \otimes b)^* = a^* \otimes b^* \quad (a, a' \in A, b, b' \in B)$$

ein Produkt und eine Involution auf $A \otimes_{\mathrm{alg}} B$, womit $A \otimes_{\mathrm{alg}} B$ zu einer *-Algebra wird. Dies gilt insbesondere für $A = \mathcal{L}(H)$ und $B = \mathcal{L}(K)$, wobei H, K komplexe Hilbeträume seien. In diesem Kontext definiert

$$\alpha : \mathcal{L}(H) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{L}(K) \to \mathcal{L}(H \otimes K), \quad \alpha(x \otimes y)(\xi \otimes \eta) := x\xi \otimes y\eta \quad (\xi \in H, \eta \in K)$$

einen injektiven *-Homomorphismus. Wir identifizieren daher $\mathcal{L}(H) \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{L}(K)$ mit einer Teilmenge von $\mathcal{L}(H \otimes K)$.

Definition. *Es seien $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(K)$ von Neumann-Algebren. Das* von Neumann-Algebra-Tensorprodukt $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}(H \otimes K)$ *sei definiert durch*

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} := (\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{alg}} \mathcal{N})''.$$

Es ist wahr, jedoch aufwändig zu zeigen, dass im Allgemeinen $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})' = \mathcal{M}' \otimes \mathcal{N}'$ (Kommutanten-Satz, siehe etwa [KaR86], Theorem 11.2.16) gilt. Wir benötigen einen Spezialfall:

Proposition 5.1.2. *Es gilt*

$$(\mathcal{L}(H) \otimes \mathbb{C}\mathbf{1}_K)' = \mathbb{C}\mathbf{1}_H \otimes \mathcal{L}(K).$$

Beweis. Wir zeigen

$$\{x \otimes \mathbf{1}_K \mid x \in \mathcal{L}(H)\}' = \{\mathbf{1}_H \otimes a \mid a \in \mathcal{L}(K)\}, \tag{$*$}$$

denn daraus folgt $(\mathcal{L}(H) \otimes \mathbb{C}\mathbf{1}_K)' = (\{x \otimes \mathbf{1}_K \mid x \in \mathcal{L}(H)\}'')' = (\{x \otimes \mathbf{1}_K \mid x \in \mathcal{L}(H)\}')'' = \{1_H \otimes a \mid a \in \mathcal{L}(K)\}'' = \mathbb{C}\mathbf{1}_H \otimes \mathcal{L}(K)$, wie gewünscht.

Es sei $\{\varepsilon_i\}_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von K. Mittels der surjektiven Isometrie $U : l_2(I, H) \to H \otimes K$ von Lemma 5.1.1 können wir Operatoren auf $H \otimes K$ als Operatoren auf $l_2(I, H)$ ansehen. Letzere besitzen eine Darstellung als Matrix $(x_{jk})_{j,k\in I}$, siehe Abschnitt A.4.

Wir zeigen nun $(*)$, wobei $\supseteq$ klar ist. Um $\subseteq$ zu zeigen, sei $A \in \mathcal{L}(H \otimes K)$ gegeben mit $A(x \otimes \mathbf{1}_K) = (x \otimes \mathbf{1}_K)A$ für alle $x \in \mathcal{L}(H)$. Dann kommutiert $Y := U^*AU \in \mathcal{L}(l_2(I, H))$

mit allen $U^*(x\otimes \mathbf{1}_K)U$. Es besitzt $U^*(x\otimes \mathbf{1}_K)U$ die Matrix $(\delta_{jk}x)_{jk}$; denn für alle $\xi \in H$ gilt $Uv_k\xi = U(\delta_{ik}\xi)_i = \xi\otimes\varepsilon_k$ und somit

$$w_j(U^*(x\otimes \mathbf{1}_K)U)v_k\xi = w_jU^*(x\xi\otimes\varepsilon_k) = w_j((\delta_{ik}x\xi)_i) = \delta_{jk}x\xi.$$

Ist nun (y_{jk}) die Matrix von Y, so gilt also $(y_{ij})\cdot(\delta_{jk}x) = (\delta_{ij}x)\cdot(y_{jk})$, und somit

$$y_{jk}x = xy_{jk} \quad (x\in\mathcal{L}(H)).$$

Es folgt $y_{jk}\in\mathcal{L}(H)' = \mathbb{C}\mathbf{1}_H$ für alle $j,k\in I$.

Es sei $\alpha_{jk}\in\mathbb{C}$ mit $y_{jk} = \alpha_{jk}\mathbf{1}_H$ für $j,k\in I$; wir konstruieren nun $a\in\mathcal{L}(K)$ mit $\langle a\varepsilon_k,\varepsilon_j\rangle = \alpha_{jk}$. Ist hierzu $\eta\in K$ gegeben, so gilt $\eta = \sum_{i\in I}\langle\eta,\varepsilon_i\rangle\varepsilon_i$ und $(\langle\eta,\varepsilon_i\rangle)_i\in l_2(I)$, so dass $(\langle\eta,\varepsilon_i\rangle\xi)_i\in l_2(I,H)$ für alle $\xi\in H$. Aufgrund der Matrixdarstellung gilt

$$Y(\langle\eta,\varepsilon_i\rangle\xi)_i = (\textstyle\sum_{k\in I}\alpha_{jk}\langle\eta,\varepsilon_k\rangle\xi)_j\in l_2(I,H).$$

Falls $\|\xi\| = 1$, so folgt die Konvergenz von $\sum_{k\in I}\alpha_{jk}\langle\eta,\varepsilon_k\rangle$ und weiter

$$\sum_{j\in I}|\sum_{k\in I}\alpha_{jk}\langle\eta,\varepsilon_k\rangle|^2 \le \|Y\|^2\|(\langle\eta,\varepsilon_i\rangle\xi)_i\|^2 = \|Y\|^2\sum_{i\in I}|\langle\eta,\varepsilon_i\rangle|^2 = \|Y\|^2\|\eta\|^2.$$

Damit wird durch $a\eta := \sum_{j\in I}\left(\sum_{k\in I}\alpha_{jk}\langle\eta,\varepsilon_k\rangle\right)\varepsilon_j$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|a\|\le\|Y\|$ definiert, und es gilt $\langle a\varepsilon_k,\varepsilon_j\rangle = \alpha_{jk}$.

Es folgt $Y = U^*(\mathbf{1}_H\otimes a)U$ wenn wir zeigen, dass $U^*(\mathbf{1}_H\otimes a)U$ die Matrix $(y_{jk}) = (\alpha_{jk}\mathbf{1}_H)$ besitzt. Dies gilt, denn für alle $\xi\in H$ gilt $a\varepsilon_k = \sum_{i\in I}\alpha_{ik}\varepsilon_i$ und folglich

$$w_j(U^*(\mathbf{1}_H\otimes a)U)v_k\xi = w_jU^*(\xi\otimes a\varepsilon_k) = w_j(\alpha_{ik}\xi)_i = \alpha_{jk}\mathbf{1}_H\xi.$$

Schließlich folgt $A = UYU^* = \mathbf{1}_H\otimes a$ und der Beweis ist abgeschlossen. □

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass in Verallgemeinerung von (∗)

$$\{x\otimes\mathbf{1}_K \mid x\in A\}' = \{\mathbf{1}_H\otimes a \mid a\in\mathcal{L}(K)\}$$

gilt, falls $A\subseteq\mathcal{L}(H)$ eine Menge mit $A' = \mathbb{C}\mathbf{1}_H$ ist.

5.2. Konstruktion des gekreuzten Produkts

Die Ausführungen in den nächsten beiden Abschnitten sind an [KaR86], Sections 13.2, 13.3, angelehnt.

Fourier-analytische Vorbereitungen

Die Fourier-Transformation $L_1(\mathbb{R})\cap L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$, $f\mapsto\widehat{f}$, kann zu einem unitären Operator $v\in\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ fortgesetzt werden. Hiermit definieren wir die „Fourier-Transformation“ für Operatoren $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))\to\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$, $a\mapsto\widehat{a} := v^*av$, d. h. $\widehat{a}$ wirkt auf die Fourier-Transformierte.

Im Folgenden betrachten wir Familien $\{l_t\}_{t\in\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ und $\{w_p\}_{p\in\mathbb{R}}\subseteq\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$, definiert durch

$$l_tf(\cdot) = f(\cdot - t), \quad w_pf(\cdot) = e^{ip\cdot}f(\cdot) \quad (f\in L_2(\mathbb{R}))$$

für $t,p\in\mathbb{R}$.

Lemma 5.2.1. *Es gilt* $l_t = \widehat{w_t}$ *und* $w_p = \widehat{l_{-p}}$ *für alle* $t, p \in \mathbb{R}$, *und* $\{l_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{w_p\}_{p\in\mathbb{R}}$ *sind stetige unitäre Gruppen.*

Beweis. Für alle $f \in C_c(\mathbb{R})$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$(vl_t f(\cdot))(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{isr} f(r-t) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} = e^{ist} \int_{\mathbb{R}} e^{isr} f(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} = (w_t v f(\cdot))(s).$$

Es folgt $vl_t = w_t v$, und somit $l_t = \widehat{w_t}$. Ebenso gilt

$$(vw_p f(\cdot))(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{isr} e^{ipr} f(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} e^{i(s+p)r} f(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} = (l_{-p} v f(\cdot))(s),$$

und es folgt $vw_p = l_{-p} v$, also $w_p = \widehat{l_{-p}}$.

Es ist $w_p = m_{h_p}$, wobei $h_p \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R})$, $h_p(s) := e^{ips}$. Wegen $\overline{h_p} = h_{-p}$ und $h_{p+q} = h_p h_q$ $(p, q \in \mathbb{R})$ folgt, dass $\{w_p\}_p = \{m_{h_p}\}_p$ eine unitäre Gruppe ist. Für $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist

$$\lim_{p\to 0} \|w_p f(\cdot) - f(\cdot)\|^2 = \lim_{p\to 0} \int_{\mathbb{R}} |e^{ips} - 1|^2 |f(s)|^2 ds = 0$$

nach dem Grenzwertsatz von Lebesgue; $\{w_p\}_p$ ist also eine stetige unitäre Gruppe. Wegen $l_t = \widehat{w_t} = v^* w_t v$ folgt, dass auch $\{l_t\}_t$ eine stetige unitäre Gruppe ist. □

Bemerkung. Wir geben eine Beweisskizze für die folgende (sehr plausible) Aussage: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar, f_t die Translation $f_t(s) = f(s-t)$ $(s \in \mathbb{R})$, und gelte $f = f_t$ fast überall $(t \in \mathbb{R})$; dann ist f fast überall konstant.

Wir benutzen die Eindeutigkeit (bis auf Normierung) des Lebesgue-Maßes λ als translationsinvariantes Maß auf den messbaren Mengen in $\mathbb{R}$. Sei zunächst $S \subseteq \mathbb{R}$ messbar und keine Nullmenge, mit $\chi_{S+t} = \chi_S$ fast überall $(t \in \mathbb{R})$; dann definiert $B \mapsto \widetilde{\lambda}(B) := \lambda(S \cap B)$ ein translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\widetilde{\lambda}(S) = \lambda(S) > 0$, so dass $\widetilde{\lambda} = \lambda$ gelten muss und $\mathbb{R} \setminus S$ eine Nullmenge ist. Ist nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ messbar und $f_t = f$ fast überall $(t \in \mathbb{R})$, sowie $B \subseteq \mathbb{C}$ messbar, dann ist nach dem vorigen Satz $f^{-1}(B)$ oder $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ eine Nullmenge, also ist f fast überall konstant.

Es bezeichne $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ die maximal kommutative von Neumann-Algebra

$$\mathcal{A} := \{m_g \mid g \in L_\infty(\mathbb{R})\},$$

wobei m_g für $g \in L_\infty(\mathbb{R})$ durch $m_g(f) := gf$ $(f \in L_2(\mathbb{R}))$ definiert sei.

Lemma 5.2.2. *Wir haben*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \overline{\operatorname{Spann}}\{w_p \mid p \in \mathbb{R}\} \quad \textit{(schwach-Operator-Abschluss)}, \\ \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R})) &= (\{w_p \mid p \in \mathbb{R}\} \cup \{l_t \mid t \in \mathbb{R}\})''. \end{aligned}$$

Beweis. Zu zeigen sind die Inklusionen $\subseteq$.

Für die erste Inklusion reicht es zu zeigen, dass jedes schwach-Operator stetiges Funktional ω auf $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ mit $\omega(w_p) = 0$ $(p \in \mathbb{R})$ auf $\mathcal{A}$ verschwindet. Schreiben wir $\omega = \sum_{j=1}^n \langle \cdot f_j, g_j \rangle$ mit $f_j, g_j \in L_2(\mathbb{R})$, so gilt

$$\omega(m_h) = \int_{\mathbb{R}} h(s) \sum_{j=1}^n f_j(s) \overline{g_j(s)} ds = \int_{\mathbb{R}} h(s) k(s) ds \quad (h \in L_\infty(\mathbb{R})),$$

wobei $k \in L_1(\mathbb{R})$, $k(s) := \sum_{j=1}^n f_j(s)\overline{g_j(s)}$. Für die Fourier-Transformierte $\widehat{k}$ gilt $\widehat{k}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{ips} k(s) \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \omega(w_p) = 0$ für alle $p \in \mathbb{R}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz der Fourier-Analysis ist dann $k = 0$ fast überall und somit $\omega(m_h) = 0$ für alle $m_h \in \mathcal{A}$.

Für die zweite Inklusion sei $x \in (\{w_p \mid p \in \mathbb{R}\} \cup \{l_t \mid t \in \mathbb{R}\})'$ und wir zeigen $x \in \mathbb{C}\mathbf{1}$. Aus dem vorigen Absatz folgt $x \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$, also $x = m_h$ für ein $h \in L_\infty(\mathbb{R})$. Ferner gilt

$$m_h f(\cdot) = l_t^* m_h l_t f(\cdot) = l_{-t} m_h f(\cdot - t) = h(\cdot + t) f(\cdot) = m_{h_{-t}} f(\cdot),$$

also $h = h_{-t}$ fast überall ($t \in \mathbb{R}$). Nach der letzten Bemerkung ist h fast überall konstant, und somit $x = m_h \in \mathbb{C}\mathbf{1}$. $\square$

Der Raum $L_2(\mathbb{R}, H)$

Im Folgenden sei H ein separabler Hilbertraum. Wir führen den Raum $L_2(\mathbb{R}, H)$ ein und zeigen, wie er mit dem Hilbertraum-Tensorprodukt $H \otimes L_2(\mathbb{R})$ identifiziert werden kann.

Eine Funktion $\xi : \mathbb{R} \to H$ heiße *messbar*, falls $t \mapsto \langle \xi(t), \eta \rangle$ messbar für alle $\eta \in H$ ist.

Bemerkung. Für zwei messbare Funktionen $\xi, \eta : \mathbb{R} \to H$ ist $t \mapsto \langle \xi(t), \eta(t) \rangle$ und insb. $t \mapsto \|\xi(t)\|^2$ messbar. Denn mit einer Orthonormalbasis (ε_n) von H ist $\langle \xi(t), \eta(t) \rangle = \sum_{j=1}^\infty \langle \xi(t), \varepsilon_n \rangle \langle \varepsilon_n, \eta(t) \rangle$.

Definition. *Es sei $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, H)$ die Menge aller messbaren Funktionen $\xi : \mathbb{R} \to H$ mit $\int_{\mathbb{R}} \|\xi(t)\|^2 dt < \infty$, und für $\xi, \eta \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, H)$ sei*

$$\langle \xi, \eta \rangle := \int_{\mathbb{R}} \langle \xi(t), \eta(t) \rangle dt.$$

Bezeichne $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, H)$ alle messbaren Funktionen ξ mit $\langle \xi, \xi \rangle = 0$, so sei definiert

$$L_2(\mathbb{R}, H) := \mathcal{L}_2(\mathbb{R}, H)/\mathcal{N}.$$

Proposition 5.2.3. *Es wird $L_2(\mathbb{R}, H)$ mit dem von $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, H)$ induzierten Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zu einem Hilbertraum, und es definiert*

$$W : H \otimes L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}, H), \quad \xi \otimes f(\cdot) \mapsto f(\cdot)\xi \quad (\xi \in H, f \in L_2(\mathbb{R}))$$

eine surjektive Isometrie.

Beweis. Man sieht leicht, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $L_2(\mathbb{R}, H)$ ist, und wir müssen noch die Vollständigkeit zeigen. Ist (ξ_n) eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathbb{R}, H)$, so existiert eine Teilfolge (ξ_{n_k}), so dass $\|\xi_m - \xi_n\| \leq 2^{-k}$ für alle $m, n \geq n_k$. Wir setzen $\eta_k := \xi_{n_k}$.

Wir zeigen, dass (η_k) fast überall punktweise konvergiert. Sei hierzu $g_k \in L_2(\mathbb{R})$ definiert durch $g_k(s) := \|\eta_k(s) - \eta_{k+1}(s)\|$ ($s \in \mathbb{R}$), dann ist $\|g_k\| = \|\eta_k - \eta_{k+1}\| \leq 2^{-k}$, und für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} (\sum_{k=1}^m \|\eta_k(s) - \eta_{k+1}(s)\|)^2 ds = \| \sum_{k=1}^m g_k \|^2 \leq (\sum_{k=1}^m \|g_k\|)^2 \leq 1.$$

Nach dem Konvergernzsatz von Beppo-Levi folgt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \|\eta_k(s) - \eta_{k+1}(s)\| < \infty$ für alle s außerhalb einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}$, und für diese existiert $\xi(s) := \lim_{k\to\infty} \eta_k(s)$. Setzen wir ξ auf N durch 0 fort, so erhalten wir eine messbare Funktion $\xi : \mathbb{R} \to H$, denn für alle $\eta \in H$ ist $s \mapsto \langle \xi(s), \eta \rangle$ der fast überall punktweise Grenzwert von messbaren Funktionen.

Nun zeigen wir $\xi_n \longrightarrow \xi$ in $L_2(\mathbb{R}, H)$. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein N mit $\|\xi_n - \xi_m\| \le \varepsilon$ für alle $m, n \ge N$. Für $m \ge N$ gilt deshalb nach dem Lemma von Fatou

$$\int_{\mathbb{R}} \|\xi(s) - \xi_m(s)\|^2 ds \le \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \|\eta_k(s) - \xi_m(s)\|^2 ds \le \varepsilon^2,$$

so dass $\xi = (\xi - \xi_m) + \xi_m \in L_2(\mathbb{R}, H)$ und $\xi_m \longrightarrow \xi$.

Sind $f_1, \ldots, f_n \in L_2(\mathbb{R})$ und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in H$, so ist $\sum_j f_j(\cdot)\xi_j \in L_2(\mathbb{R}, H)$ und es gilt $\| \sum_j f_j(\cdot)\xi_j\|^2 = \sum_{j,k} \langle \xi_j, \xi_k \rangle \int_{\mathbb{R}} f_j(s)\overline{f_k(s)} ds = \sum_{j,k} \langle \xi_j \otimes f_j, \xi_k \otimes f_k \rangle = \| \sum_j \xi_j \otimes f_j \|^2$. Somit definiert W eine Isometrie.

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{Bild} W \subseteq L_2(\mathbb{R}, H)$ dicht ist, d. h. $\xi \in \operatorname{Bild} W^{\perp}$ impliziert $\xi = 0$. Ist (ε_n) eine Orthonormalbasis von H, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(s) \langle \varepsilon_n, \xi(s) \rangle ds = \langle W(\varepsilon \otimes f), \xi \rangle = 0$$

für alle $f \in L_2(\mathbb{R})$ und n. Damit ist $\langle \varepsilon_n, \xi(\cdot) \rangle = 0$ fast überall, und folglich $\xi = 0$ fast überall, wie gewünscht. $\square$

Wir identifizieren im Folgenden $L_2(\mathbb{R}, H)$ mit $H \otimes L_2(\mathbb{R})$ und beschreiben als Nächstes, wie zu Abbildungen $y : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(H)$ Operatoren Y auf $L_2(\mathbb{R}, H)$ definiert werden können.

Lemma 5.2.4. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra und $y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ eine schwach-Operator stetige, beschränkte Abbildung. Dann definiert*

$$Y : \xi(\cdot) \mapsto y(\cdot)\xi(\cdot) \quad (\xi \in L_2(\mathbb{R}, H))$$

einen Operator $Y \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $Y\xi \in L_2(\mathbb{R}, H)$ für $\xi \in L_2(\mathbb{R}, H)$ ist.

Um die Messbarkeit von $Y\xi$ zu zeigen, sei $\eta \in H$ und (ε_n) eine Orthonormalbasis von H. Dann ist $\langle (Y\xi)(s), \eta \rangle = \langle y(s)\xi(s), \eta \rangle = \langle \xi(s), y^*(s)\eta \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi(s), \varepsilon_n \rangle \langle \varepsilon_n, y^*(s)\eta \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \xi(s), \varepsilon_n \rangle \langle y(s)\varepsilon_n, \eta \rangle$ messbar als Funktion von s, weil ξ messbar ist und y schwach-Operator stetig ist.

Mit $M := \sup \|y(s)\| < \infty$ ist $\|Y\xi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \|y(s)\xi(s)\|^2 ds \le M^2 \int_{\mathbb{R}} \|\xi(s)\|^2 ds < \infty$, so dass $Y\xi \in L_2(\mathbb{R}, H)$. Damit sieht man bereits auch, dass Y einen linearen Operator in $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$ definiert mit $\|Y\| \le M$.

Nun zeigen wir $Y \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$.

1. Schritt. Es sei y von der Form $y(\cdot) = g(\cdot)x$, wobei $g \in C(\mathbb{R})$ beschränkt und $x \in \mathcal{M}$ fest sei. Für alle $\eta \in H$ und $f \in L_2(\mathbb{R})$ gilt dann $Y(\eta \otimes f) = Y(f(\cdot)\eta) = g(\cdot)f(\cdot)x\eta = x\eta \otimes g(\cdot)f(\cdot) = (x \otimes m_g)(\eta \otimes f)$, und somit $Y = x \otimes m_g \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$.

2. Schritt. Ist nun $y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ schach-Operator stetig und $M := \sup \|y(s)\| < \infty$, so approximieren wir y durch Linearkombinationen von Funktionen obiger Form. Und zwar konstruieren wir eine Folge (y_n), wobei $y_n(\cdot) := \sum_{j=1}^{k_n} g_{nj}(\cdot)x_{nj}$ mit $g_{nj} \in C(\mathbb{R})$ beschränkt und $x_{nj} \in \mathcal{M}$ mit $\|x_{nj}\| \leq M$, so dass $y_n \longrightarrow y$ punktweise in schwach-Operator-Topologie.

Es sei $n \in \mathbb{N}$, und $(U_{nj})_{j=1}^{k_n}$ eine Überdeckung von $[-n,n]$ mit offenen Intervallen der Länge $\leq \frac{1}{n}$. Wähle nun Funktionen $g_{nj} \in C(\mathbb{R})$, $g_{nj} \geq 0$ mit $\operatorname{supp} g_{nj} \subseteq U_{nj}$, so dass $\sum_{j=1}^{k_n} g_{nj} \leq 1$ auf $\mathbb{R}$ und $\sum_{j=1}^{k_n} g_{nj} = 1$ auf $[-n,n]$ (vgl. Partition der Eins). Wähle weiterhin $x_{nj} := y(s_{nj})$, wobei $s_{nj} \in U_{nj}$ beliebig, und setze $y_n(\cdot) := \sum_{j=1}^{k_n} g_{nj}(\cdot)x_{nj}$. Man folgert aus der Stetigkeit von $s \mapsto \langle y(s)\xi, \eta\rangle$ nun leicht $\langle y_n(s)\xi, \eta\rangle \longrightarrow \langle y(s)\xi,\eta\rangle$ für alle $s \in \mathbb{R}$ und $\xi, \eta \in H$.

3. Schritt. Sind $Y_n \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$ die zu y_n korrespondierenden Operatoren, so gilt nach dem 1. Schritt $Y_n \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$. Wir zeigen $Y_n \longrightarrow Y$ in schwach-Operator-Topologie, woraus dann $Y \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ folgt. Ist $\xi, \eta \in L_2(\mathbb{R}, H)$, dann gilt nach dem Grenzwertsatz von Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} \langle y(s)\xi(s), \eta(s)\rangle ds = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \langle y_n(s)\xi(s), \eta(s)\rangle ds,$$

denn $|\langle y_n(s)\xi(s), \eta(s)\rangle| \leq M\|\xi(s)\|\|\eta(s)\|$ für $s \in \mathbb{R}$ und $\int_{\mathbb{R}} \|\xi(s)\|\|\eta(s)\| ds < \infty$. Somit ist $\langle Y\xi, \eta\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Y_n\xi, \eta\rangle$, und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Das gekreuzte Produkt

Es seien $\{l_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{w_p\}_{p\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$,

$$l_t f(\cdot) = f(\cdot - t), \quad w_p f(\cdot) = e^{ip\cdot} f(\cdot) \quad (f \in L_2(\mathbb{R})),$$

die stetigen unitären Gruppen vom Anfang dieses Abschnitts. Man sieht leicht, dass durch

$$L_t := \mathbf{1} \otimes l_t, \quad W_p := \mathbf{1} \otimes w_p$$

stetige unitäre Gruppen $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{W_p\}_{p\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$ definiert werden.

Definition. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra und $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ eine stetige Automorphismusgruppe. Das (abstrakte)* gekreuzte Produkt *$\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_\alpha \mathbb{R} \subseteq \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$ ist die von den Operatoren $\pi(x)$ $(x \in \mathcal{M})$ und L_t $(t \in \mathbb{R})$ generierte von Neumann-Algebra, wobei*

$$\pi(x)\xi(\cdot) := \alpha_{-\cdot}(x)\xi(\cdot), \quad L_t\xi(\cdot) = \xi(\cdot - t) \quad (\xi \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H)).$$

Bemerkung. (1) Nach Lemma 5.2.4 ist $\pi(x) \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$, somit gilt $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$.

(2) Es gilt $\pi(x)L_t\xi(\cdot) = \pi(x)\xi(\cdot - t) = \alpha_{-\cdot}(x)\xi(\cdot - t) = \alpha_{t-\cdot}(\alpha_{-t}(x))\xi(\cdot - t) = L_t\alpha_{-\cdot}(\alpha_{-t}(x))\xi(\cdot) = L_t\pi(\alpha_{-t}(x))\xi(\cdot)$, also

$$L_t^*\pi(x)L_t = \pi(\alpha_{-t}(x)).$$

Damit folgt, dass der lineare Spann von $L_t\pi(x)$ $(t \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{M})$ eine *-Algebra ist, so dass

$$\mathcal{N} = \overline{\mathrm{Spann}}\{L_t\pi(x) \mid x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}\},$$

wobei der schwach-Operator-Abschluss gemeint ist.

Proposition 5.2.5. *Es sei* $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *durch eine stetige unitäre Gruppe* $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}(H)$ *implementiert (d. h.* $\alpha_t(x) = u_t^* x u_t$*). Dann definiert*

$$U\xi(\cdot) := u.\xi(\cdot) \quad (\xi \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$$

einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$*, und es gilt*

$$U^*\pi(x)U = x \otimes \mathbf{1}, \quad U^* L_t U = u_{-t} \otimes l_t.$$

Ist $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes_\alpha \mathbb{R}$ das abstrakte gekreuzte Produkt zu einer unitär implementierten Automorphismusgruppe, so bezeichnen wir die von den Operatoren $x \otimes \mathbf{1}$ $(x \in \mathcal{M})$ und $u_{-t} \otimes l_t$ $(t \in \mathbb{R})$ erzeugte von Neumann-Algebra $U^*\mathcal{N}U$ als *implementiertes gekreuztes Produkt.*

Beweis. Nach Lemma 5.2.4 ist $U \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$ und man zeigt leicht, dass $U^*\xi(\cdot) = u_{-.}\xi(\cdot)$ und damit $UU^* = U^*U = \mathbf{1}$ gilt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} U^*\pi(x)U\xi(\cdot) = U^*\pi(x)u.\xi(\cdot) = U^*\alpha_{-.}(x)u.\xi(\cdot) = u_{-.}\alpha_{-.}(x)u.\xi(\cdot) = x\xi(\cdot) \\ U^*L_tU\xi(\cdot) = U^*L_tu.\xi(\cdot) = U^*u_{.-t}\xi(\cdot - t) = u_{-t}\xi(\cdot - t), \end{aligned}$$

für $\xi(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, H)$, also $U^*\pi(x)U = x \otimes \mathbf{1}$ und $U^*L_tU = u_{-t} \otimes l_t$. □

Bemerkung. Eine kurze Rechnung unter Benutzung von $w_{-p} l_t w_p = e^{-ipt} l_t$ liefert

$$W_p^* \pi(x) W_p = \pi(x), \quad W_p^* L_t W_p = e^{-ipt} L_t;$$

die folgende Definition ist also gerechtfertigt.

Definition. *Die* duale Aktion $\{\widehat{\alpha}_p\}_{p\in\mathbb{R}}$ *auf* $\mathcal{N}$ *sei die durch*

$$\widehat{\alpha}_p(A) := W_p^* A W_p \quad (A \in \mathcal{N}, p \in \mathbb{R})$$

definierte stetige Automorphismusgruppe.

Mittels der dualen Aktion ließe sich erneut das gekreuzte Produkt von $\mathcal{N}$ bilden. Takesaki's Dualitätstheorem besagt, dass dieses isomorph zu $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ ist (siehe etwa [KaR86], Theorem 13.2.9), jedoch benötigen wir dieses Resultat nicht.

Proposition 5.2.6. *Ist* $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *unitär implementiert, so ist* $\pi(\mathcal{M})$ *die Fixpunkt-Algebra unter der dualen Aktion, d. h.*

$$\pi(\mathcal{M}) = \bigcap_{p\in\mathbb{R}} \{A \in \mathcal{N} \mid \widehat{\alpha}_p(A) = A\}.$$

Beweis. Wir benutzen den unitären Operator $U \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$ aus Proposition 5.2.5 und die Darstellung von $\mathcal{N}$ als implementiertes gekreuztes Produkt $U^*\mathcal{N}U$. Man prüft leicht nach, dass $U^*W_pU = W_p$ gilt. Ferner ist $L_t^*(x \otimes \mathbf{1})L_t = x \otimes \mathbf{1}$ und $L_t^*(u_{-t} \otimes l_t)L_t = u_{-t} \otimes l_t$, und somit $L_t^* X L_t = X$ für alle $X \in U^*\mathcal{N}U$.

Für den Beweis des Satzes ist lediglich $\supseteq$ zu zeigen. Sei hierfür $A \in \mathcal{N}$ mit $W_p^* A W_p = A$ für alle $p \in \mathbb{R}$ gegeben, und sei $X := U^*AU$. Nach der Vorbemerkung folgt dann

$W_p^* X W_p = W_p^* U^* A U W_p = U^* W_p^* A W_p U = U^* A U = X$, sowie $L_s^* X L_s = X$ für $p, s \in \mathbb{R}$; also ist

$$X \subseteq (\{1 \otimes w_p \mid p \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{1} \otimes l_t \mid t \in \mathbb{R}\})'.$$

Nach Lemma 5.2.2 ist $(\{w_p \mid p \in \mathbb{R}\} \cup \{l_t \mid t \in \mathbb{R}\})' = \mathbb{C}\mathbf{1}$ und wegen der Bemerkung zu Proposition 5.1.2 folgt $X = x \otimes \mathbf{1}$ für ein $x \in \mathcal{L}(H)$.

Es bleibt $x \in \mathcal{M} = \mathcal{M}''$ zu zeigen, denn daraus folgt $A = UXU^* = U(x \otimes \mathbf{1})U^* = \pi(x)$. Sei $y \in \mathcal{M}'$ und $Y := y \otimes \mathbf{1}$. Wegen $A \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ gilt $AY = YA$, und daher

$$f(\cdot)u_{\cdot}xu_{-\cdot}y\xi = A(f(\cdot)y\xi) = AY(f(\cdot)y) = YA(f(\cdot)\xi) = Yf(\cdot)u_{\cdot}xu_{-\cdot}\xi = f(\cdot)yu_{\cdot}xu_{-\cdot}\xi$$

für alle $\xi \in H$ und $f \in L_2(\mathbb{R})$, also $f(s)u_s x u_{-s} y\xi = f(s) y u_s x u_{-s}\xi$ für fast alle $s \in \mathbb{R}$. Speziell für $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 1$ folgt damit $xy\xi = yx\xi$ (setze $s = 0$), so dass $xy = yx$, was zu beweisen war. □

Proposition 5.2.7. *Ist $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ unitär implementiert, so ist $\pi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein injektiver *-Homomorphismus und $\pi(\mathcal{M})$ ist eine von Neumann-Algebra; es lässt sich $\mathcal{N}$ somit als Erweiterungsalgebra von $\mathcal{M}$ auffassen.*

Beweis. Mit $U \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}, H))$ aus Proposition 5.2.5 ist $\pi(x) = U(x \otimes \mathbf{1})U^*$, also ist π ein injektiver *-Homomorphismus. Als Fixpunktalgebra von unitär implementierten Automorphismen (siehe Proposition 5.2.6) ist $\pi(\mathcal{M})$ schwach-Operator-abgeschlossen und somit eine von Neumann-Algebra. □

Bemerkung. Die letzten beiden Aussagen bleiben für nicht unitär implementierte Automorphismusgruppen $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ gültig; man kann die Situation auf den unitär implementierten Fall zurückführen.

5.3. Gekreuzte Produkte zu modularen Automorphismusgruppen

Es sei $\mathcal{M}_0$ eine von Neumann-Algebra mit einem treuen, normalen Zustand φ. Nach Satz 1.9.3 ist $\mathcal{M}_0$ *-isomorph zu einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ mit einem zyklischen und separierenden Vektor ξ_0 (via der GNS-Darstellung bezüglich φ). Ist $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ die (unitär implementierte, stetige) modulare Automorphismusgruppe auf $\mathcal{M}$ zum Vektorzustand ω_{ξ_0}, so lässt sich das entsprechende gekreuzte Produkt $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_\sigma \mathbb{R}$ auch als Erweiterungsalgebra von $\mathcal{M}_0$ ansehen.

Wir werden zeigen, dass $\mathcal{N}$ eine treue, normale, semifinite Spur τ mit $\tau \circ \widehat{\sigma}_p = e^{-p}\tau$ besitzt, wobei $\{\widehat{\sigma}_p\}_{p\in\mathbb{R}}$ die duale Aktion bezeichne. Diese Tatsache ist fundamental für die Konstruktion nicht-kommutativer Integrationsräume bezüglich $\mathcal{M}_0$.

Konstruktion der Spur

Es seien $\{l_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{w_p\}_{p\in\mathbb{R}}$ die stetigen unitären Gruppen vom Anfang dieses Abschnitts; ferner sei $v \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ der unitäre Operator, der die Fourier-Transformierte fortsetzt, sowie $\widehat{a} := v^* a v$ für $a \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$. Es gilt dann $l_t = \widehat{w_t}$, $w_p = \widehat{l_{-p}}$ für $t, p \in \mathbb{R}$, siehe Lemma 5.2.1.

Zu einer beschränkten, messbaren Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ definiere $f_X \in L_2(\mathbb{R})$ durch

$$f_X(s) := \begin{cases} e^{-s/2} & \text{falls } s \in X, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und setze

$$\tau_X := \text{Vektorzustand zu } \xi_0 \otimes v^* f_X$$

(wir bezeichnen hierbei auch ein nicht-normiertes positives Funktional als Zustand).

Es sei daran erinnert, dass $\mathcal{N}$ der schwach-Operator-Abschluss des linearen Spanns der Operatoren $L_t\pi(x) = (\mathbf{1} \otimes \widehat{w_t})\pi(x)$ ist. Deswegen ist das folgende Lemma von Interesse.

Lemma 5.3.1. *Wir haben*

$$\tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)) = \omega_{\xi_0}(x) \int_X g(s)e^{-s} ds \quad (g \in L_\infty(\mathbb{R})).$$

Beweis. Es gilt (beachte $\langle \sigma_t(x)\xi_0, \xi_0\rangle = \omega_{\xi_0}(\sigma_t(x)) = \omega_{\xi_0}(x)$ für alle $t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)) &= \langle (\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)(\xi_0 \otimes v^* f_X), \xi_0 \otimes v^* f_X\rangle \\ &= \langle \pi(x)(\xi_0 \otimes v^* f_X), \xi_0 \otimes \widehat{m_g}^* v^* f_X\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma_{-s}(x)(v^* f_X)(s)\xi_0, ((v\widehat{m_g})^* f_X)(s)\xi_0\rangle ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \sigma_{-s}(x)\xi_0, \xi_0\rangle (v^* f_X)(s)\overline{((v\widehat{m_g})^* f_X)}(s)\xi_0 ds \\ &= \omega_{\xi_0}(x)\langle v^* f_X, (v\widehat{m_g})^* f_X\rangle = \omega_{\xi_0}(x)\langle m_g f_X, f_X\rangle \\ &= \omega_{\xi_0}(x) \int_X g(s)e^{-s} gs, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Zu $X \subseteq \mathbb{R}$ messbar definieren wir

$$E_X := \mathbf{1} \otimes \widehat{m\chi_X} \in \mathcal{N}_{\text{proj}}.$$

Weil $\{m\chi_X\}_X$ ein Netz ist mit $m\chi_X \longrightarrow \mathbf{1}$ in starker Operator-Topologie, folgt dass $\{E_X\}_X$ ein Netz ist mit $E_X \longrightarrow \mathbf{1}$ in starker Operator-Topologie.

Eigenschaften von τ_X. Seien X, Y beschränkte, messbare Mengen.

(1) Für $X \subseteq Y$ gilt

$$\tau_Y(E_X A E_X) = \tau_X(A) \quad (A \in \mathcal{N}).$$

Denn wegen $E_X(\xi_0 \otimes v^* f_Y) = \xi_0 \otimes v^* m\chi_X v v^* f_Y = \xi_0 \otimes v^* f_X$ gilt $\tau_Y(E_X A E_X) = \langle A E_X(\xi_0 \otimes v^* f_Y), E_X(\xi_0 \otimes v^* f_Y)\rangle = \tau_X(A)$.

(2) Ist $X \cap Y$ eine Nullmenge, so gilt

$$\tau_{X+Y}(A) = \tau_X(A) + \tau_Y(A) \quad (A \in \mathcal{N}).$$

Dies folgt für $A = L_t\pi(x) = (\mathbf{1} \otimes \widehat{w_t})\pi(x)$ aus dem obigen Lemma; weil es sich um Vektorzustände handelt, folgt die Gleichung somit für den schwach-Operator-Abschluss des Spanns von Operatoren $L_t\pi(x)$ und damit für alle $A \in \mathcal{N}$.

(3) Es gilt

$$\tau_X(\widehat{\sigma}_p(A)) = e^{-p}\tau_{X-p}(A) \quad (A \in \mathcal{N}).$$

Es reicht wieder, $A = L_t\pi(x) = (1 \otimes \widehat{w_t})\pi(x)$ zu betrachten. Nach dem Lemma gilt

$$\begin{aligned}
\tau_X(W_p^* L_t\pi(x)W_p) &= \tau_X(e^{-ipt}L_t\pi(x)) = \omega_{\xi_0}(x)e^{-ipt}\int_X e^{its}e^{-s}ds \\
&= \omega_{\xi_0}(x)\int_X e^{-p}e^{it(s-p)}e^{p-s}ds = e^{-p}\omega_{\xi_0}(x)\int_{X-p} e^{its}e^{-s}ds \\
&= e^{-p}\omega_{\xi_0}(x)\tau_{X-p}(L_t\pi(x)).
\end{aligned}$$

Proposition 5.3.2. *Es definiert*

$$\tau(A) := \sup\{\tau_X(A) \mid X \subseteq \mathbb{R} \text{ messbar, beschränkt}\} \quad (A \in \mathcal{N}_+)$$

ein normales, semifinites, treues Gewicht mit $\tau \circ \widehat{\sigma}_p = e^{-p}\tau$.

Beweis. Für alle $A \in \mathcal{N}_+$ und X messbar, beschränkt folgt nach Eigenschaft (2) $\tau_X(A) \leq \lim_n \tau_{[-n,n]}(A) \leq \tau(A)$. Erneut mit Eigenschaft (2) schließen wir

$$\tau(A) = \lim_n \tau_{[-n,n]}(A) = \lim_n \sum_{j=-n}^{n-1} \tau_{[j,j+1]}(A) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_{[j,j+1]}(A),$$

d. h. τ ist als abzählbare Summe von Vektorzuständen ein normales Gewicht.

Ferner gilt nach Eigenschaft (1)

$$\tau_X(A) = \lim_n \tau_{[-n,n]}(E_X A E_X) = \tau(E_X A E_X)$$

und es folgt, dass τ endlich auf $\bigcup_X E_X\mathcal{N}E_X$ ist. Wegen $\{E_X\}_X \longrightarrow \mathbf{1}$ in starker Operator-Topologie ist daher τ semifinit.

Um zu zeigen, dass τ treu ist, sei $A \in \mathcal{N}$ mit $\tau(A^*A) = 0$. Dann ist für alle X messbar und beschränkt $\tau_X(A^*A) = \|A(\xi_0 \otimes v^* f_X)\|^2 = 0$. Es folgt $A = 0$ wenn wir zeigen, dass die Familie $\{\xi_0 \otimes v^* f_X\}_X$ separierend für $\mathcal{N}$, bzw. zyklisch für $\mathcal{N}'$ ist.

Um letzteres zu zeigen halten wir zunächst fest, dass $\{v^* f_X\}_X$ dicht in $L_2(\mathbb{R})$ ist. Denn sei $g \in L_2(\mathbb{R})$ mit $\langle g, v^* f_X\rangle = 0$ für alle X, dann folgt

$$\int_X (vg)(s)e^{-s/2}ds = \langle vg, f_X\rangle = \langle g, v^* f_X\rangle = 0$$

für alle X und somit $vg = 0$ und $g = 0$. Ferner ist ξ_0 zyklisch für $\mathcal{M}'$, also $\mathcal{M}'\xi_0$ dicht in H. Insgesamt folgt also, dass $\{(x \otimes \mathbf{1})(\xi_0 \otimes v^* f_X)\}_{X, x \in \mathcal{M}'}$ dicht in $H \otimes L_2(\mathbb{R})$ ist und wegen $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ gilt $x \otimes \mathbf{1} \in \mathcal{N}'$ für alle $x \in \mathcal{M}'$. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir müssen noch zeigen, dass τ eine Spur ist, also dass $\tau(A^*A) = \tau(AA^*)$ für $A \in \mathcal{N}$ gilt. Das folgende Lemma ist ein wesentlicher Schritt in diese Richtung.

Lemma 5.3.3. *Es sei $X = [-c, c]$ mit $c > 0$, und $g, h \in C_c(\mathbb{R})$ mit Träger in X, so dass $\widehat{g}, \widehat{h} \in L_1(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$\tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\pi(y)) = \tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\pi(y)(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)) \quad (x, y \in \mathcal{M}).$$

Zusatzbemerkung. Eine Funktion $g \in C_c(\mathbb{R})$ mit stetiger zweiter Ableitung g'' erfüllt automatisch $\widehat{g} \in L_1(\mathbb{R})$.

Denn nach partieller Integration gilt $\widehat{g}(s) = \int_{\mathbb{R}} e^{iqs} g(q) \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} = -\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{is} e^{iqs} g'(q) \frac{dq}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(is)^2} e^{iqs} g''(q) \frac{dq}{\sqrt{2\pi}}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Also ist $|\widehat{g}(s)| \leq \frac{1}{s^2} M$ für ein $M > 0$ und damit $\widehat{g} \in L_1(\mathbb{R})$.

Beweis. Wir formen zunächst die linke Seite um.

(1) Es gilt nach dem Inversionstheorem der Fourier-Analysis und nach Fubini

$$\begin{aligned}
\langle (\mathbf{1} \otimes m_h)\xi(\cdot), \eta(\cdot)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} h(s)\langle \xi(s), \eta(s)\rangle ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-isr} \widehat{h}(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} \right) \langle \xi(s), \eta(s)\rangle ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-isr} \langle \xi(s), \eta(s)\rangle ds \, \widehat{h}(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle W_{-r}\xi(\cdot), \eta(\cdot)\rangle \widehat{h}(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

für alle $\xi(\cdot), \eta(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, H)$.

(2) Wegen $\widehat{m_h} = v^* m_h v$ und $l_t = \widehat{w_t} = v^* w_t v$ und (1) folgt

$$\begin{aligned}
\langle (\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\xi(\cdot), \eta(\cdot)\rangle &= \langle (\mathbf{1} \otimes m_h)(\mathbf{1} \otimes v)\xi(\cdot), (\mathbf{1} \otimes v)\eta(\cdot)\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle W_{-r}(\mathbf{1} \otimes v)\xi(\cdot), (\mathbf{1} \otimes v)\eta(\cdot)\rangle \widehat{h}(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \langle L_{-r}\xi(\cdot), \eta(\cdot)\rangle \widehat{h}(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

(3) Es folgt mit (2) nun

$$\begin{aligned}
& \tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\pi(y)) \\
= \; & \langle (\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\pi(y)(\xi_0 \otimes v^* f_X), ((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x))^*(\xi_0 \otimes v^* f_X)\rangle \\
= \; & \int_{\mathbb{R}} \langle L_{-r}\pi(y)(\xi_0 \otimes v^* f_X), ((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x))^*(\xi_0 \otimes v^* f_X)\rangle \widehat{h}(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}} \\
= \; & \int_{\mathbb{R}} \tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x) L_{-r}\pi(y)) \widehat{h}(r) \frac{dr}{\sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

(4) Wir formen $\tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)L_{-r}\pi(y))$ weiter um. Es gilt $\pi(x)L_{-r} = L_{-r}\pi(\sigma_r(x)) = (\mathbf{1} \otimes l_{-r})\pi(\sigma_r(x))$ und somit

$$(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)L_{-r}\pi(y) = (\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g} l_{-r})\pi(\sigma_r(x)y),$$

wobei $\widehat{m_g} l_{-r} = \widehat{m_g}\widehat{w_{-r}} = \widehat{m_k}$, mit $k(s) := e^{-irs} g(s)$. Mit Lemma 5.3.1 folgt

$$\tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)L_{-r}\pi(y)) = \omega_{\xi_0}(\sigma_r(x)y) \int_X k(s) e^{-s} ds.$$

(5) Weil der Träger von g in X liegt, gilt

$$\int_X k(s)e^{-s}ds = \int_{\mathbb{R}} e^{is(i-r)}g(s)ds = \sqrt{2\pi}\widehat{g}(i-r).$$

Eingesetzt in (4) und dies dann in (3) ergibt schließlich

$$\tau_X((\mathbf{1}\otimes\widehat{m_g})\pi(x)(\mathbf{1}\otimes\widehat{m_h})\pi(y)) = \int_{\mathbb{R}} \omega_{\xi_0}(\sigma_r(x)y)\widehat{g}(i-r)\widehat{h}(r)dr,$$

und aus Symmetriegründen folgt

$$\tau_X((\mathbf{1}\otimes\widehat{m_h})\pi(y)(\mathbf{1}\otimes\widehat{m_g})\pi(x)) = \int_{\mathbb{R}} \omega_{\xi_0}(\sigma_r(y)x)\widehat{h}(i-r)\widehat{g}(r)dr.$$

Wir benutzen jetzt die KMS-Bedingung der modularen Automorphismusgruppe $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ bezüglich ω_{ξ_0} um die Gleichheit dieser beiden Integrale zu schließen. Es sei also $f \in C(\{z\in\mathbb{C} \mid 0\leq \operatorname{Re} z\leq 1\})$ beschränkt, holomorph im Inneren, so dass

$$f(r) = \omega_{\xi_0}(\sigma_r(x)y) \quad\text{und}\quad f(i+r) = \omega_{\xi_0}(y\sigma_r(x)) \quad (r\in\mathbb{R}).$$

Weil ω_{ξ_0} invariant unter σ_r ist, folgt $f(i+r) = \omega_{\xi_0}(y\sigma_r(x)) = \omega_{\xi_0}(\sigma_{-r}(y)x)$, und damit

$$\text{erstes Integral} = \int_{\mathbb{R}} f(r)\widehat{h}(r)\widehat{g}(i-r)dr, \quad \text{zweites Integral} = \int_{\mathbb{R}} f(i+r)\widehat{h}(i+r)\widehat{g}(-r)dr.$$

Die Funktion $f(z)\widehat{h}(z)\widehat{g}(i-z)$ ist beschränkt und stetig auf $\{z\in\mathbb{C} \mid 0\leq \operatorname{Re} z\leq 1\}$, holomorph im Inneren, und konvergiert für $|\operatorname{Re} z| \longrightarrow \infty$ gegen 0. Betrachten wir das Wegintegral um das Rechteck mit den Eckpunkten $\pm R$ und $\pm R+i$, so folgt mit $R\longrightarrow\infty$ wegen Cauchy's Integralsatz und dem Konvergenzsatz nach Lebesgue die Gleichheit der Integrale. □

Lemma 5.3.4. *Für alle $A\in\mathcal{N}$ gilt*

$$\tau(A^*A) = \tau(AA^*).$$

Beweis. Wir bemerken zunächst

$$\tau(A^*A) = \lim_{n\to\infty} \tau_{[-n,n]}(A^*E_{[-n,n]}A);$$

denn für $n\geq m$ ist $A^*E_{[-n,n]}A \geq A^*E_{[-m,m]}A$ und damit $\liminf_n \tau_{[-n,n]}(A^*E_{[-n,n]}A) \geq \lim_n \tau_{[-n,n]}(A^*E_{[-m,m]}A) = \tau(A^*E_{[-m,m]}A)$; es folgt

$$\tau(A^*A) \geq \liminf_n \tau_{[-n,n]}(A^*E_{[-n,n]}A) \geq \lim_m \tau(A^*E_{[-m,m]}A) = \tau(A^*A),$$

aufgrund der Normalität von τ.

Es reicht daher, $\tau_X(A^*E_XA) = \tau_X(AE_XA^*)$ für alle $X=[-c,c]$, $c>0$ zu zeigen, was gleichwertig zu $\tau_X(E_XA^*E_XAE_X) = \tau_X(E_XAE_XA^*E_X)$ ist. Die Behauptung des Lemmas folgt also aus

$$\tau_X(E_XAE_XB) = \tau_X(E_XBE_XA) \quad (A,B\in\mathcal{N},\ X=[-c,c], c>0). \tag{$*$}$$

Für den Beweis von $(*)$ reicht es, $A = (\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)$ und $B = (\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\pi(y)$ mit $g, h \in L_\infty(\mathbb{R})$ und $x, y \in \mathcal{M}$ zu betrachten, weil solche Operatoren schwach-Operator-dicht liegen in $\mathcal{N}$ (es sei daran erinnert, dass τ_X ein Vektorzustand ist).

Es ist $E_X(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g}) = \mathbf{1} \otimes \widehat{m_{\chi_X}}\widehat{m_g} = \mathbf{1} \otimes \widehat{m_{g\chi_X}}$, und im Hinblick auf das letzte Lemma werden wir $g\chi_X$ durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen mit Träger in X approximieren.

Nach [Rud74], Korollar zu 2.24, existiert eine Folge $(k_n) \subseteq C_c(\mathbb{R})$ mit $k_n \longrightarrow g\chi_X$ fast überall punktweise und $\|k_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es eine Folge von Polynomen $(p_n) \in C(\mathbb{R})$ mit $\|p_n - (1-\frac{1}{n})k_n\|_X \leq \frac{1}{n}\|k_n\|_X$ (hierbei bezeichne $\|\cdot\|_X$ die Supremumsnorm auf X). Insgesamt gilt also $p_n \longrightarrow g$ fast überall auf X, sowie $\|p_n\|_X \leq \|k_n\|_X \leq \|g\|_\infty$. Weiterhin gibt es eine Folge $(\chi_n) \subseteq C_c(\mathbb{R})$ zweimal stetig differenzierbarer Funktionen χ_n mit Träger in X und $\|\chi_n\| \leq 1$, so dass $\chi_n \longrightarrow \chi_X$ punktweise auf $\mathbb{R} \setminus \{-c, c\}$. Die Produktfolge $(g_n) \in C_c(\mathbb{R})$, $g_n := p_n\chi_n$, besteht daher aus zweimal stetig differenzierbaren Funktionen mit Träger in X und $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, so dass $g_n \longrightarrow g\chi_X$ fast überall punktweise.

Nach dem Grenzwertsatz von Lebesgue folgt

$$\int_R |(g_n(t) - g(t)\chi_X(t))f(t)|^2 dt \longrightarrow 0 \quad (f \in L_2(\mathbb{R})),$$

so dass $m_{g_n} \longrightarrow m_{g\chi_X}$ und damit $\mathbf{1} \otimes \widehat{m_{g_n}} \longrightarrow \mathbf{1} \otimes \widehat{m_{g\chi_X}} = E_X(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})$, jeweils in starker Operator-Topologie.

Es ist $E_X(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h}) = \mathbf{1} \otimes \widehat{m_{h\chi_X}}$, und approximieren wir $h\chi_X$ auf die gleiche Weise durch eine Folge (h_n), so gilt nach dem letzten Lemma

$$\tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_{g_n}})\pi(x)(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_{h_n}})\pi(y)) = \tau_X((\mathbf{1} \otimes \widehat{m_{h_n}})\pi(y)(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_{g_n}})\pi(x)),$$

also $\tau_X(E_X(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x)E_X(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\pi(y)) = \tau_X(E_X(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_h})\pi(y)E_X(\mathbf{1} \otimes \widehat{m_g})\pi(x))$ mit $n \longrightarrow \infty$, wie gewünscht. $\square$

Wir fassen zusammen:

Satz 5.3.5. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra mit einem generierenden und zyklischen Vektor und $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_\sigma \mathbb{R}$ das gekreuzte Produkt zu der entsprechenden modularen Automorphismusgruppe. Dann besitzt $\mathcal{N}$ eine normale semifinite treue Spur τ mit*

$$\tau \circ \widehat{\sigma}_p = e^{-p}\tau \quad (p \in \mathbb{R}),$$

wobei $\{\widehat{\sigma}_p\}_p$ die duale Aktion auf $\mathcal{N}$ bezeichne.

6. Haagerup-L_p-Räume

Die vorliegende Darstellung der Haagerup-L_p-Räume ist [Ter81], Chapter II, entnommen.

6.1. Definition

In diesem Kapitel betrachten wir ausschließlich Operatoren auf einem separablen Hilbertraum. Dies ist notwendig, weil wir dies für die Konstruktion des gekreuzten Produkts angenommen haben.

Sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra, φ_0 ein normaler, treuer Zustand auf $\mathcal{M}$ und $\{\sigma_t^{\varphi_0}\}_{t\in\mathbb{R}}$ die zugehörige modulare Automorphismusgruppe. Das entsprechende gekreuzte Produkt sei $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R}$, und es bezeichne $\{\vartheta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ die duale Automorphismusgruppe auf $\mathcal{N}$. Nach Satz 5.3.5 existiert eine normale, semifinite, treue Spur τ auf $\mathcal{N}$, mit $\tau \circ \vartheta_s = e^{-s}y$ ($y \in \mathcal{N}, s \in \mathbb{R}$). Es sei daran erinnert, dass $\mathcal{N}$ via der Einbettung $\pi : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ als Erweiterungsalgebra von $\mathcal{M}$ angesehen werden kann.[1]

Wir bezeichnen mit $\widetilde{\mathcal{N}}$ die topologische *-Algebra aller mit $\mathcal{N}$ affiliierten, τ-messbaren Operatoren (siehe Abschnitt 3.2), sowie mit $\widetilde{\mathcal{N}}_+$ deren Positivteil.

Bemerkung. Die (unitär implementierten) *-Automorphismen ϑ_s auf $\mathcal{N}$ besitzen natürliche Fortsetzungen auf $\overline{\mathcal{N}}$ bzw. auf $\widetilde{\mathcal{N}}$. Aus der Eindeutigkeit des Borel'schen Funktionenkalküls folgt $\vartheta_s(g(a)) = g(\vartheta_s(a))$ für alle $a \in \overline{\mathcal{N}}_{sa}$ und $g \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.

Definition. *Es sei $p \in [1, \infty]$. Mit obigen Bezeichnungen ist*

$$L_p(\mathcal{M}) := \{a \in \widetilde{\mathcal{N}} \mid \vartheta_s(a) = e^{-s/p}a \text{ für alle } s \in \mathbb{R}\}$$

der (Haagerup-)L_p-Raum *zu einer von Neumann-Algebra $\mathcal{M}$.*

Bemerkung. (1) Für alle $p \in [1, \infty]$ ist $L_p(\mathcal{M})$ ein Vektorraum, und mit $a \in L_p(\mathcal{M})$ sind auch $a^* \in L_p(\mathcal{M})$ und $|a| \in L_p(\mathcal{M})$; die letzte Aussage folgt etwa aus

$$\vartheta_s(|a|) = |\vartheta_s(a)| = |e^{-s/p}a| = e^{-s/p}|a|.$$

Es folgt, dass $L_p(\mathcal{M})$ der lineare Spann von $L_p(\mathcal{M})_+ = L_p(\mathcal{M}) \cap \widetilde{\mathcal{N}}_+$ ist.

(2) Es ist $L_p(\mathcal{M}) \cap L_q(\mathcal{M}) = \{0\}$ falls $p \neq q$.

(3) Sind $p, q, r \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ und ist $a \in L_p(\mathcal{M})$, $b \in L_q(\mathcal{M})$, so ist $ab \in L_r(\mathcal{M})$; denn es ist $ab \in \widetilde{\mathcal{N}}$ und $\vartheta_s(ab) = \vartheta_s(a)\vartheta_s(b) = e^{-s/p}ae^{-s/q}b = e^{-s/r}ab$.

---

[1] Genau genommen betrachten wir das gekreuzte Produkt $\mathcal{N}$ zu $\mathcal{M}_0$, einer zu $\mathcal{M}$ *-isomorphen von Neumann-Algebra, die einen zyklischen und separierenden Vektor besitzt (siehe Satz 1.9.3), weil wir für nur für diesen Fall die Existenz der Spur auf $\mathcal{N}$ bewiesen haben.

Bemerkung (2) stellt eine durchaus befremdliche Eigenschaft der Haagerup-L_p-Räume dar. Dagegen zeigt (3), wie leicht eine „Mini-Version" der Hölder'schen Ungleichung bewiesen werden kann.

Lemma 6.1.1. *Es sei $a \in \overline{\mathcal{N}}$ und $p \in [1, \infty)$. Dann gilt*

$$a \in L_p(\mathcal{M}) \;\Leftrightarrow\; |a|^p \in L_1(\mathcal{M}).$$

Beweis. Wir haben $\tau(\chi_{(\lambda,\infty)}(|a|)) = \tau(\chi_{(\lambda^p,\infty)}(|a|^p))$ für alle $\lambda > 0$, also ist $a \in \widetilde{\mathcal{N}}$ nach der Bemerkung zu Lemma 3.2.2 äquivalent zu $|a|^p \in \widetilde{\mathcal{N}}$. Für solche a und $s \in \mathbb{R}$ ist nun $\vartheta_s(a) = e^{-s/p}a$ äquivalent zu $\vartheta_s(|a|^p) = |\vartheta_s(a)|^p = e^{-s}|a|^p$. □

Um $L_p(\mathcal{M})$ mit einer Norm zu versehen, erörtern wir nachfolgend, wie $L_1(\mathcal{M})$ mit der Prädualen $\mathcal{M}_*$ von $\mathcal{M}$ identifiziert werden kann; dann übertragen wir die Norm von $\mathcal{M}_*$ auf $L_1(\mathcal{M})$ und leiten daraus auch eine Norm auf $L_p(\mathcal{M})$ ab.

6.2. Weitere Grundlagen

Für die Identifikation $L_1(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}_*$ sind einige Grundlagen über duale Gewichte zu gekreuzten Produkten, sowie über operatorwertige Gewichte erforderlich.

Die Polarzerlegung in $\mathcal{M}_*$

Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra und $\mathcal{M}_*$ deren Prädualen. Es sei daran erinnert, dass $\mathcal{M}_*$ via der kanonischen Einbettung $\mathcal{M}_* \hookrightarrow \mathcal{M}^*$ mit den σ-schwach-stetigen Funktionalen auf $\mathcal{M}$ identifiziert werden kann. Dementsprechend seien $\mathcal{M}_*^+$ alle σ-schwach-stetigen, positiven Funktionale.

Definition. *Es sei $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ ein lineares Funktional und $x \in \mathcal{M}$. Wir definieren*

$$\varphi^* := \overline{\varphi(\cdot^*)}, \quad x.\varphi := \varphi(\cdot x), \quad \varphi.x := \varphi(x\cdot).$$

Bemerkung. Es sind φ^*, $x.\varphi$ und $\varphi.x$ lineare Funktionale auf $\mathcal{M}$, und es gilt

$$x.(y.\varphi) = xy.\varphi, \quad (\varphi.x).y = \varphi.xy, \quad (x.\varphi)^* = \varphi^*.x^* \quad (x, y \in \mathcal{M}).$$

Ist φ stetig, so sind auch φ^*, $x.\varphi$ und $\varphi.x$ stetig mit $\|x.\varphi\| \leq \|x\|\|\varphi\|$ und $\|\varphi.x\| \leq \|\varphi\|\|x\|$. Liegt φ in $\mathcal{M}_*$, so sind auch φ^*, $x.\varphi$ und $\varphi.x$ in $\mathcal{M}_*$.

Für den Beweis der nächsten Aussage verweisen wir auf [Tak79], Theorem III.4.2.

Satz 6.2.1. *Es sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra.*

(1) *Jedes Funktional $\varphi \in \mathcal{M}_*$ besitzt eine eindeutige Polarzerlegung*

$$\varphi = v.\omega,$$

wobei $\omega \in \mathcal{M}_*^+$ und $v \in \mathcal{M}$ eine partielle Isometrie mit $v^*v = \operatorname{supp}\omega$ ist; wir definieren $|\varphi| := \omega$.

(2) *$\mathcal{M}_*$ ist der Spann von $\mathcal{M}_*^+$.*

Der erweiterte Positivteil einer von Neumann-Algebra

Der Wertebereich eines operatorwertigen Gewichts wird wie bei gewöhnlichen Gewichten auch gewisse „unbeschränkte Objekte“ beinhalten. Hierfür werden wir den erweiterten Positiventeil einführen.

Definition. *Der* erweiterte Positivteil $\widehat{\mathcal{M}}_+$ *einer von Neumann-Algebra* $\mathcal{M}$ *ist die Menge aller additiven, positiv homogenen Abbildungen* $m : \mathcal{M}_*^+ \to [0, \infty]$, *die nach unten halbstetig sind*[2].

Bemerkung. (1) Jedes $x \in \mathcal{M}_+$ definiert ein Element in $\widehat{\mathcal{M}}_+$ durch $m_x : \varphi \mapsto \varphi(x)$ (m_x ist sogar stetig), so dass $\mathcal{M}_+$ als Teilmenge von $\widehat{\mathcal{M}}_+$ angesehen werden kann.

(2) Es sei $\overline{\mathcal{M}}_+$ die Menge aller mit $\mathcal{M}$ affiliierten, positiven selbstadjungierten Operatoren. Ist $A \in \overline{\mathcal{M}}_+$ und $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subseteq \mathcal{M}$ die Spektralschar zu $\mathcal{M}$, so definiert

$$m_A : \varphi \mapsto \int_0^\infty \lambda d\varphi(e_\lambda) \quad (\varphi \in \mathcal{M}_*^+)$$

ein Element in $\widehat{\mathcal{M}}_+$, und die Abbildung $A \mapsto m_A$ ist injektiv (ohne Beweis). Hierdurch kann auch $\overline{\mathcal{M}}_+$ als Teilmenge von $\widehat{\mathcal{M}}_+$ angesehen werden.

Definition. *Zu* $m, n \in \widehat{\mathcal{M}}_+$, $x \in \mathcal{M}$ *und* $\lambda \geq 0$ *definieren wir Elemente* λm, $m + n$ *und* $x^* m x$ *in* $\widehat{M}_+$ *durch*

$$(\lambda m)(\varphi) := \lambda\, m(\varphi), \quad (m+n)(\varphi) := m(\varphi) + n(\varphi), \quad (x^* m x)(\varphi) := m(x.\varphi.x^*)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$.

Bemerkung. (1) Es ist nicht schwer zu zeigen, dass λm, $m + n$ und $x^* m x$ tatsächlich in $\widehat{M}_+$ sind.

(2) Im Fall $m, n \in \mathcal{M}_+$ stimmen diese Definitionen mit den üblichen Operationen in $\mathcal{M}$ überein; für den Fall $m, n \in \overline{\mathcal{M}}_+$ beachte die Bemerkung nach Proposition 6.2.2.

(3) Es sei $\{m_\alpha\}_\alpha \subseteq \widehat{M}_+$ ein monoton steigendes Netz, d. h. $\{m_\alpha(\varphi)\}_\alpha$ ist monoton steigend für alle $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$. Dann definiert

$$m(\varphi) := \sup_\alpha m_\alpha(\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{M}_*^+)$$

ein Element $m = \sup_\alpha m_\alpha \in \widehat{M}_+$. Es folgt $\sum_i m_i \in \widehat{M}_+$ für jede Familie $\{m_i\}_i \subseteq \widehat{M}_+$.

Wir interessieren uns nun für alternative Darstellungen der Elemente des erweiterten Positivteils. Die Beweise der folgenden drei Aussagen findet man in [Tak03], IX.4, p215-218 oder in [Haa79a], Section 1.

[2]Eine Funktion $m : X \to (-\infty, \infty]$ auf einem metrischen Raum X ist *nach unten halbstetig*, wenn $\{x \in X \mid m(x) > \lambda\}$ offen für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist; dies ist äquivalent zu

$$m(x) \leq \limsup_{y \to x} m(y) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$

Proposition 6.2.2. *Es sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(H)$ eine von Neumann-Algebra und $m \in \widehat{M}_+$. Dann existiert genau ein abgeschlossener Teilraum $K \subseteq H$ und ein positiver selbstadjungierter Operator A auf K, so dass*

$$m(\omega_\xi) = \begin{cases} \|A^{1/2}\xi\|^2 & \text{für } \xi \in D(A^{1/2}) \\ \infty & \text{sonst;} \end{cases}$$

ferner ist die Projektion auf K in $\mathcal{M}$ und A ist affiliiert mit $\mathcal{M}$.

Beweis-Skizze. Die Abbildung $\xi \mapsto m(\omega_\xi)$ definiert eine sog. quadratische Form. Wir setzen

$$K_0 := \{\xi \in H \mid m(\omega_\xi) < \infty\}, \quad K := \overline{K_0}$$

und können einen positiven selbstadjungierten Operator A auf K finden mit $D(A^{1/2}) = K_0$ und $\|A^{1/2}\xi\|^2 = m(\omega_\xi)$ für $\xi \in D(A^{1/2})$. □

Bemerkung. (1) Seien $A, B \in \overline{\mathcal{M}}_+$ und $m := m_A + m_B$. Im Beweis der obigen Proposition ist dann $K_0 = D(A^{1/2}) \cap D(B^{1/2})$. Ist $K_0 \subseteq H$ dicht, so ist $m = m_C$ für ein $C \in \overline{\mathcal{M}}_+$; es wird C auch als *Form-Summe* von A und B bezeichnet. Es gilt

$$D(C^{1/2}) = D(A^{1/2}) \cap D(B^{1/2}), \quad \|C^{1/2}\xi\|^2 = \|A^{1/2}\xi\|^2 + \|B^{1/2}\xi\|^2 \quad (\xi \in D(C^{1/2})).$$

Ferner haben wir $A + B \subseteq C$. Denn für $\xi \in D(A + B) \subseteq D(A^{1/2}) \cap D(B^{1/2})$ und $\eta \in D(C) \subseteq D(C^{1/2})$ folgt mittels Polarisation

$$\langle (A+B)\xi, \eta\rangle = \langle A^{1/2}\xi, A^{1/2}\eta\rangle + \langle B^{1/2}\xi, B^{1/2}\eta\rangle = \langle C^{1/2}\xi, C^{1/2}\eta\rangle = \langle \xi, C\eta\rangle,$$

also $A + B \subseteq C^* = C$.

(2) Sei $A \in \overline{\mathcal{M}}_+$, $x \in \mathcal{M}$, sowie $m := x^* m_A x$. Dann ist entsprechend $K_0 = D(A^{1/2}x)$, und ist $K_0 \subseteq H$ dicht, so ist $m = m_C$ für ein $C \in \overline{\mathcal{M}}_+$ mit

$$D(C^{1/2}) = D(A^{1/2}x), \quad \|C^{1/2}\xi\|^2 = \|A^{1/2}x\xi\|^2 \quad (\xi \in D(C^{1/2})).$$

Ganz analog wie bei (1) lässt sich $x^*Ax \subseteq C$ zeigen.

Satz 6.2.3. *Jedes Element $m \in \widehat{\mathcal{M}}_+$ besitzt eine eindeutige Spektralzerlegung*

$$m(\varphi) = \int_0^\infty \lambda d\varphi(e_\lambda) + \infty\varphi(p) \quad (\varphi \in \mathcal{M}_*^+),$$

wobei $\{e_\lambda\}_{\lambda \geq 0}$ eine Familie von Projektionen ist mit $e_\lambda \leq e_\mu$ für $\lambda \leq \mu$, $e_\lambda = \bigwedge_{\mu > \lambda} e_\mu$ und $p^\perp = \bigvee_{\lambda \geq 0} e_\lambda$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} e_0 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad m(\varphi) > 0 \textit{ für alle } \varphi \in \mathcal{M}_*^+ \setminus \{0\}, \\ p = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \{\varphi \in \mathcal{M}_*^+ \mid m(\varphi) < \infty\} \textit{ ist dicht in } \mathcal{M}_*^+. \end{aligned}$$

Korollar 6.2.4. *Jedes normale Gewicht φ auf $\mathcal{M}$ hat genau eine additive, positiv homogene Fortsetzung (ebenfalls φ genannt) auf $\widehat{M}_+$, die additiv und positiv homogen ist, so dass $\varphi(\sup_\alpha m_\alpha) = \sup_\alpha m_\alpha(\varphi)$ für alle monoton steigenden Netze $\{m_\alpha\}$ gilt.*

Bemerkung. Es sei $\vartheta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ein *-Automorphismus. Dann besitzt ϑ eine natürliche Fortsetzung auf $\widehat{M}_+$, gegeben durch

$$(\vartheta(m))(\varphi) := m(\varphi \circ \vartheta) \quad (m \in \widehat{M}_+).$$

Für $x \in \mathcal{M}_+$ ist dann $\vartheta(m_x) = m_{\vartheta(x)}$.

Wir zitieren nachfolgend eine weitere, wichtige Aussage. Hierfür sei der *Träger* $\operatorname{supp} x$ eines Elements $x \in \mathcal{M}$ durch $\operatorname{supp} x := e_N(x)^\perp$ definiert, wobei $e_N(x)$ die Projektion auf den Kern von x bezeichne.

Satz 6.2.5. *Es sei $\mathcal{M}$ eine semifinite von Neumann-Algebra und τ eine normale, semifinite, treue Spur auf $\mathcal{M}$. Zu einem mit $\mathcal{M}$ affiliierten Operator $h \geq 0$ definiere das Gewicht $\varphi_h = \tau(h\cdot)$ durch $\varphi_h(x) := \tau(h^{1/2}xh^{1/2})$.*

(1) *Die Abbildung $h \mapsto \varphi_h$ definiert eine Bijektion zwischen den mit $\mathcal{M}$ affiliierten positiven Operatoren und den normalen, semifiniten Gewichten auf $\mathcal{M}$.*

(2) *Diese Abbildung kann in eindeutiger Weise zu einer Bijektion zwischen $\widehat{M}_+$ und den normalen Gewichten auf $\mathcal{M}$ fortgesetzt werden.*

(3) *Für die Fortsetzung gilt $\varphi_{h+k} = \varphi_h + \varphi_k$, $\varphi_{xhx^*} = x.\varphi_h.x^*$ und $\operatorname{supp} \varphi_h = \operatorname{supp} h$, für $h, k \in \widehat{M}_+$ und $x \in \mathcal{M}$.*

Gemäß der Umkehrabbildung $\varphi \mapsto h_\varphi$ der Bijektion $h \mapsto \varphi_h$ nennt man h_φ auch die (lineare) *Radon-Nikodym-Ableitung* von φ bezüglich τ.

Beweis. Siehe [Haa79a], Theorem 1.12, dessen Beweis, und [Haa79a], Prop. 1.11, (4). □

Operatorwertige Gewichte

In diesem Teilabschnitt bezeichnen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ stets von Neumann-Algebren mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

Definition. *Ein* operatorwertiges Gewicht *von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{M}$ ist eine additive, positiv homogene Abbildung $T : \mathcal{N}_+ \to \widehat{\mathcal{M}}_+$ mit*

$$T(a^*xa) = a^*T(x)a \quad (x \in \mathcal{N}_+, a \in \mathcal{M}).$$

In Analogie zu den gewöhnlichen Gewichten definieren wir

$$n_T := \{x \in \mathcal{N} \mid \|T(x^*x)\| < \infty\},$$
$$f_T := \{x \in \mathcal{N}_+ \mid \|T(x)\| < \infty\}, \quad m_T := \operatorname{Spann} f_T.$$

Wir nennen T *normal*, falls

$$T(x_\alpha) \nearrow T(x) \text{ für alle Netze } \{x_\alpha\} \subseteq \mathcal{N}_+, x \in \mathcal{N}_+ \text{ und } x_\alpha \nearrow x;$$

hierbei bedeutet $T(x_\alpha) \nearrow T(x)$, dass $T(x_\alpha)(\varphi) \nearrow T(x)(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$. Ferner heißt T *semifinit*, falls n_T schwach-Operator-dicht in $\mathcal{N}$ ist, und *treu*, falls $\varphi(x^*x) = 0$ stets $x = 0$ impliziert.

Bemerkung. Es kann T zu einer linearen Abbildung $\dot{T}$ auf m_T fortgesetzt werden mit

$$\dot{T}(axb) = a\dot{T}(x)b \quad (x \in m_T, a, b \in \mathcal{M}).$$

Im Fall $T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ heißt $\dot{T}$ auch *bedingte Erwartung*.

Proposition 6.2.6.

(1) *Jedes normale operatorwertige Gewicht T von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{M}$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung $T : \widehat{\mathcal{N}}_+ \to \widehat{\mathcal{M}}_+$ mit den entsprechenden Eigenschaften eines normalen operatorwertigen Gewichts.*

(2) *Sind $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{R}$ von Neumann-Algebren und $S : \mathcal{R}_+ \to \widehat{\mathcal{N}}_+$, $T : \mathcal{N}_+ \to \widehat{\mathcal{M}}_+$ normale operatorwertige Gewichte, so ist $T \circ S : \mathcal{R}_+ \to \widehat{\mathcal{M}}_+$ ein normales operatorwertiges Gewicht. Sind S, T treu bzw. semifinit, so ist $T \circ S$ treu bzw. semifinit.*

(3) *Ist T ein normales, semifinites, treues operatorwertiges Gewicht von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{M}$, so gilt $T(\widehat{\mathcal{M}}_+) = \widehat{\mathcal{N}}_+$.*

Beweis. Siehe [Tak03], Prop. IX.4.16, Prop. IX.4.17, oder [Haa79a], Remark 2.4, Prop. 2.5. □

Satz 6.2.7. *Es sei T ein normales, semifinites, treues Gewicht von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{M}$ und es seien φ und ψ normale, semifinite, treue Gewichte auf $\mathcal{M}$. Dann gilt:*

(1) $\sigma_t^{\varphi \circ T}(x) = \sigma_t^{\varphi}(x)$ *für alle* $x \in \mathcal{M}$.

(2) $(D\psi \circ T : D\varphi \circ T)_t = (D\psi : D\varphi)_t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$.

Zum Beweis. Der Beweis ist leider recht aufwendig (siehe [Tak03], Cor. IX.4.22, oder [Haa79a], Theorem 4.7.).

Man beweist (1), indem $\sigma_{-i}^{\varphi \circ T} \subseteq \sigma_{-i}^{\varphi}$ gezeigt wird; hierbei betrachten wir eine analytische Fortsetzung der modularen Automorphismusgruppe σ_t^{φ} auf $t \in \mathbb{C}$. Es wird σ_{-i}^{φ} der *analytische Generator* von $\{\sigma_t^{\varphi}\}_{t \in \mathbb{R}}$ genannt. □

Duale Gewichte zu gekreuzten Produkten

Nachfolgend sei $\mathcal{M}$ eine von Neumann-Algebra, φ_0 ein normaler, treuer Zustand auf $\mathcal{M}$, und $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R}$ das gekreuzte Produkt bezüglich der modularen Automorphismusgruppe $\{\sigma_t^{\varphi_0}\}_{t \in \mathbb{R}}$. Die duale Automorphismusgruppe auf $\mathcal{N}$ sei mit $\{\vartheta_p\}_{p \in \mathbb{R}}$ bezeichnet.

Wir möchten zu einem normalen Gewicht φ auf $\mathcal{M}$ ein duales Gewicht $\widetilde{\varphi}$ auf $\mathcal{N}$ definieren, welches invariant unter $\{\vartheta_p\}_{p \in \mathbb{R}}$ ist. Hierfür gibt es die Möglichkeit, zu φ eine sog. *Links-Hilbert-Algebra* $\widetilde{A}_{\varphi}$ konstruieren und $\widetilde{\varphi}$ als das zu $\widetilde{A}_{\varphi}$ assoziierte Gewicht definieren (siehe etwa [Tak03], Section X.1). Eine andere Methode benutzt hierfür operatorwertige Gewichte, dies ist für unsere Zwecke praktischer.

Definition und Bemerkung. Zu $x \in \mathcal{N}_+$ definiert

$$Tx := \int_{\mathbb{R}} \vartheta_s(x) ds \tag{$*$}$$

ein Element in $\widehat{\mathcal{M}}_+$.

Und zwar definiert Tx zunächst ein Element in $\widehat{\mathcal{N}}_+$ durch $(Tx)(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(\vartheta_s(x))ds$ für alle $\varphi \in \mathcal{N}_*^+$. Setzen wir die ϑ_s zu Automorphismen auf $\widehat{\mathcal{N}}_+$ fort, so gilt

$$(\vartheta_s(Tx))(\varphi) = (Tx)(\varphi \circ \vartheta_s) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\vartheta_s(\vartheta_t(x)))dt = (Tx)(\varphi)$$

und es folgt $\vartheta_s(Tx) = Tx$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Ist nun $Tx = \int_0^\infty \lambda de_\lambda + \infty p$ die Spektralzerlegung von Tx, so folgt wegen der Eindeutigkeit $\vartheta_s(e_\lambda) = e_\lambda$ und $\vartheta_s(p) = p$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit sind e_λ und p in $\mathcal{M}$, der Fixpunktalgebra unter $\{\vartheta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$, und somit kann Tx als Element von $\widehat{\mathcal{M}}_+$ betrachtet werden.

Für den Beweis der nächsten Aussage siehe [Haa79b], Lemma 5.2.

Lemma 6.2.8. *Durch* $(*)$ *wird ein normales, semifinites, treues operatorwertiges Gewicht* T *von* $\mathcal{N}$ *nach* $\mathcal{M}$ *definiert.*

Definition. *Zu einem normalen Gewicht* φ *auf* $\mathcal{M}$ *definiere das* duale Gewicht $\widetilde{\varphi}$ *auf* $\mathcal{N}$ *durch*

$$\widetilde{\varphi} := \varphi \circ T.$$

Bemerkung. Es ist $\widetilde{\varphi}$ ein normales Gewicht nach Proposition 6.2.6, (2), und wegen $T\vartheta_s(x) = Tx$ gilt ferner $\widetilde{\varphi} \circ \vartheta_s = \widetilde{\varphi}$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Nach dieser Bemerkung sind duale Gewichte invariant unter der dualen Automorphismusgruppe $\{\vartheta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$. Diese Eigenschaft liefert sogar eine Charakterisierung von gewissen dualen Gewichten:

Satz 6.2.9. *Es sei* ω *ein normales, semifinites, treues Gewicht* ω *auf* $\mathcal{N}$*, welches invariant unter der dualen Automorphismusgruppe* $\{\vartheta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ *ist. Dann ist* ω *das Dualgewicht eines normalen, semifiniten, treuen Gewichts* φ *auf* $\mathcal{M}$*.*

Beweis-Skizze. Es sei ω gegeben, sowie ein normales, semifinites, treues Gewicht φ_0 auf $\mathcal{M}$ gewählt. Mit der Voraussetzung folgt dann $u_t := (D\omega : D\widetilde{\varphi_0})_t \in \mathcal{M}$, und deshalb gibt es ein Gewicht φ auf $\mathcal{M}$ mit $(D\varphi : D\varphi_0)_t = u_t$; dies ist die Umkehrung des Satzes von der cozyklischen Radon-Nikodym-Ableitung 4.3.2. Mittels Satz 6.2.7 folgt dann $\widetilde{\varphi} = \omega$.

Für einen genauen Beweis, siehe [Tak03], Theorem IX.2.3, (ii). $\square$

Für unsere Zwecke benötigen wir eine Modifikation des obigen Satzes.

Proposition 6.2.10. *Die Abbildung* $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ *definiert eine Bijektion zwischen den normalen, semifiniten Gewichten auf* $\mathcal{M}$ *und den normalen, semifiniten, unter* $\{\vartheta_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ *invarianten Gewichten auf* $\mathcal{N}$*. Darüber hinaus gilt*

$$(\varphi + \psi)\widetilde{} = \widetilde{\varphi} + \widetilde{\psi}, \quad (x.\varphi.x^*)\widetilde{} = x.\widetilde{\varphi}.x^* \quad \textit{und} \quad \operatorname{supp} \widetilde{\varphi} = \operatorname{supp} \varphi$$

für alle normalen Gewichte φ, ψ *auf* $\mathcal{M}$ *und alle* $x \in \mathcal{M}$*.*

Beweis. Nach Proposition 6.2.6, (2), ist $\widetilde{\varphi}$ semifinit, wenn φ semifinit ist; somit ist die Abbildung $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ wohldefiniert. Setzen wir φ, $\widetilde{\varphi}$ und T jeweils auf den erweiterten Positivteil fort, so erkennen wir aus der Formel $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ T$ und Proposition 6.2.6, (3) die Injektivität der Abbildung. Bevor wir die Surjektivität der Abbildung $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ nachweisen, werden wir deren Eigenschaften zeigen.

Wir bezeichnen temporär die Erweiterung eines normalen Gewichts $\varphi : \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$ auf $\widehat{\mathcal{M}}_+$ mit $\widehat{\varphi}$, so dass präzise $\widetilde{\varphi} = \widehat{\varphi} \circ T$ gilt. Man erkennt, dass $\widehat{\varphi} + \widehat{\psi}$ die $(\varphi + \psi)\widehat{}$

charakterisierenden Eigenschaften besitzt, so dass $(\varphi+\psi)\widehat{} = \widehat{\varphi}+\widehat{\psi}$ und damit $(\varphi+\psi)\widetilde{} = \widetilde{\varphi}+\widetilde{\psi}$ folgt. Ebenso ist $(x.\varphi.x^*)\widehat{} = x.\widehat{\varphi}.x^*$, und es folgt

$$(x.\varphi.x^*)\widetilde{}(y) = \widehat{\varphi}(x^*(Ty)x) = \widehat{\varphi}(T(x^*yx)) = x.\widetilde{\varphi}.x^*(y) \quad (y \in \mathcal{N}_+).$$

Es sei nun $p := \operatorname{supp}\varphi$, $q := \operatorname{supp}\widetilde{\varphi}$ und wir zeigen $p = q$. Für alle $y \in n_T$ und $x \in N_\varphi$ ist

$$\widetilde{\varphi}(x^*y^*yx) = \varphi(x^*T(y^*y)x) \leq \|T(y^*y)\|\varphi(x^*x) = 0,$$

so dass $n_T N_\varphi \subseteq N_{\widetilde{\varphi}}$ gilt. Da n_T stark-Operator-dicht ist, existiert ein Netz $\{y_\alpha\} \subseteq n_T$ mit $y_\alpha \longrightarrow \mathbf{1}$ in starker Operator-Topologie. Für alle $x \in N_\varphi$ ist damit $\{y_\alpha x\} \subseteq N_{\widetilde{\varphi}}$ ein Netz mit $y_\alpha x \longrightarrow x$ in starker Operator-Topologie, so dass $x \in \overline{N_{\widetilde{\varphi}}}^s$ ist, dem stark-Operator-Abschluss von $N_{\widetilde{\varphi}}$. Nach Lemma 1.10.2, (2), folgt damit

$$\mathcal{M}p^\perp = N_\varphi \subseteq \overline{N_{\widetilde{\varphi}}}^s = \overline{\mathcal{N}q^\perp}^s = Nq^\perp.$$

Damit ist $p^\perp = xq^\perp$ für ein $x \in \mathcal{N}$, folglich $\operatorname{Kern} p^\perp = \operatorname{Kern}(xq^\perp) \supseteq \operatorname{Kern} q^\perp$, und somit $\operatorname{Bild} p \supseteq \operatorname{Bild} q$, also $p \geq q$.

Nun ist $q^\perp = \bigvee\{f \in \mathcal{M}_{\text{proj}} \mid \widetilde{\varphi}(f) = 0\}$ ebenso wie $\widetilde{\varphi}$ invariant unter der dualen Automorphismusgruppe $\{\vartheta_s\}$, also gilt $q^\perp \in \mathcal{M}$. Um $p^\perp \geq q^\perp$ zu folgern bleibt also noch $\varphi(q^\perp) = 0$ zu zeigen. Nach Proposition 6.2.6, (3) existiert $x \in \widehat{N}_+$ mit $Tx = \mathbf{1}$, und folglich ist

$$\varphi(q^\perp) = \varphi(q^\perp(Tx)q^\perp) = \varphi(T(q^\perp xq^\perp)) = \widetilde{\varphi}(q^\perp xq^\perp) = 0,$$

nach Lemma 1.10.2, (1).

Wir zeigen schließlich die Surjektivität der Abbildung $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$. Sei ω ein normales, semifinites Gewicht auf $\mathcal{N}$ mit $\omega \circ \vartheta_s = \omega$ für $s \in \mathbb{R}$. Mit der gleichen Argumentation wie oben ist dann $q := \operatorname{supp}\omega \in \mathcal{M}$, und wir wählen ein normales, semifinites Gewicht ψ_0 auf $\mathcal{M}$ mit $\operatorname{supp}\psi_0 = q^\perp$.[3] Damit ist $\widetilde{\psi_0}$ ein normales, semifinites Gewicht mit $\operatorname{supp}\widetilde{\psi_0} = q^\perp$. Es folgt $\operatorname{supp}(\widetilde{\psi_0} + \omega) = \mathbf{1}$ und somit ist $\widetilde{\psi_0} + \omega$ treu. Nach dem vorigen Satz 6.2.9 gibt es ein normales, semifinites, treues Gewicht φ auf $\mathcal{M}$ mit $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi_0} + \omega$. Damit folgt dann

$$\omega = q(\widetilde{\psi_0} + \omega)q = q\widetilde{\varphi}q = (q\varphi q)\widetilde{},$$

also ist $q\varphi q$ das gesuchte Urbild zu ω. □

6.3. Die Identifikation $L_1(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}_*$.

Konstruktion. Wir verknüpfen die Abbildung $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ aus Proposition 6.2.10 mit der Umkehrabbildung von $h \mapsto \varphi_h$ aus Satz 6.2.5, um eine Abbildung $\varphi \mapsto a_\varphi$ zu erhalten, so dass

$$\widetilde{\varphi} = \tau(a_\varphi \cdot) \quad \text{für alle normalen, semifiniten Gewichte } \varphi \text{ auf } \mathcal{M}.$$

[3] Jede von Neumann-Algebra besitzt ein normales, semifinites, treues Gewicht ψ, siehe etwa [Tak03], Theorem VII.2.7. In unserem Fall des separablen Hilbetraums folgt dies aus Satz 1.9.2. Ist ein solches Gewicht ψ gefunden, so ist $\psi_0 := \psi(q^\perp \cdot q^\perp)$ ein Gewicht mit $\operatorname{supp}\psi_0 = q^\perp$.

Lemma 6.3.1. *Die Abbildung $\varphi \mapsto a_\varphi$ ist eine Bijektion zwischen den normalen, semifiniten Gewichten auf $\mathcal{M}$ und den positiven, selbstadjungierten mit $\mathcal{N}$ affiliierten Operatoren a_φ, die $\vartheta_s(a_\varphi) = e^{-s}a_\varphi$ für $s \in \mathbb{R}$ erfüllen. Außerdem gilt*

$$a_{\varphi+\psi} = a_\varphi + a_\psi, \quad a_{x.\varphi.x^*} = xa_\varphi x^*, \quad \operatorname{supp} a_\varphi = \operatorname{supp} \varphi$$

für alle normalen, semifiniten Gewichte φ, ψ, und alle $x \in \mathcal{M}$ (mit $a_\varphi + a_\psi$ und $xa_\varphi x^*$ sind die Operationen in $\widehat{\mathrm{N}}_+$ gemeint).

Beweis. Für alle $a \in \overline{\mathcal{N}}_+$, $b \in \mathcal{N}_+$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\tau(\vartheta_s(a)b) = \tau(\vartheta_s(a\vartheta_{-s}(b))) = e^{-s}\tau(a\vartheta_{-s}(b)),$$

und daher ist $\vartheta_s(a) = e^{-s}a$ äquivalent zu $e^{-s}\tau(a\cdot) = e^{-s}\tau(a\vartheta_{-s}(\cdot))$ und damit zu $\tau(a\cdot) = \tau(a\cdot) \circ \vartheta_{-s}$. Daher folgt die Bijektivität der Abbildung $\varphi \mapsto a_\varphi$ aus Proposition 6.2.10 und Satz 6.2.5, die auch dessen Eigenschaften liefern, wie etwa $\operatorname{supp}\varphi = \operatorname{supp}\widetilde{\varphi} = \operatorname{supp}\tau(a_\varphi\cdot) = \operatorname{supp} a_\varphi$. □

Lemma 6.3.2. *Für ein normales, semifinites Gewicht φ auf $\mathcal{M}$ haben wir*

$$\tau(e_1^\perp) = \varphi(\mathbf{1}) \quad (\{e_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \textit{ die Spektralschar zu } a_\varphi).$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(\lambda) := \frac{1}{\lambda}\chi_{(1,\infty)}(\lambda)$. Dann gilt

$$\tau(e_1^\perp) = \tau(a_\varphi^{1/2} f(a_\varphi) a_\varphi^{1/2}) = \widetilde{\varphi}(f(a_\varphi)) = \varphi(\int_\mathbb{R} \vartheta_s(f(a_\varphi))ds). \tag{$*$}$$

Nun haben wir $\vartheta_s(f(a_\varphi)) = f(\vartheta_s(a_\varphi)) = f(e^{-s}a_\varphi)$, und es folgt

$$\langle \int_\mathbb{R} \vartheta_s(f(a_\varphi))ds\xi, \xi\rangle = \int_\mathbb{R} \langle f(e^{-s}a_\varphi)\xi, \xi\rangle = \int_\mathbb{R}\int_{(0,\infty)} f(e^{-s}\lambda)d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle ds = \dots,$$

wir benutzen nun $f(e^{-s}\lambda) = e^s\frac{1}{\lambda}\chi_{(1,\lambda)}(e^{-s}\lambda)$ und $e^{-s}\lambda > 1 \Leftrightarrow s < \log\lambda$,

$$\dots = \int_{(0,\infty)}\int_{-\infty}^{\log\lambda} e^s\tfrac{1}{\lambda}dsd\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle = \int_{(0,\infty)} \lambda\tfrac{1}{\lambda}d\langle e_\lambda\xi, \xi\rangle = \|e_0^\perp\xi\|^2 = \langle \operatorname{supp} a_\varphi \xi, \xi\rangle,$$

denn es ist $\operatorname{Bild} e_0 = \operatorname{Kern} a_\varphi$ (siehe Beweis von Lemma 2.6.7) und damit $e_0^\perp = \operatorname{supp} a_\varphi$; wir haben also $\int_\mathbb{R} \vartheta_s(f(a_\varphi))ds = \operatorname{supp} a_\varphi = \operatorname{supp}\varphi$ gezeigt.

Eingesetzt in ($*$) ergibt dies $\tau(e_1^\perp) = \varphi(\operatorname{supp}\varphi) = \varphi(\mathbf{1})$, wie gewünscht. □

Korollar 6.3.3. *Es ist a_φ τ-messbar genau dann, wenn $\varphi \in \mathcal{M}_*$.*

Beweis. Es sei $\lambda > 0$, $s := \log\lambda \in \mathbb{R}$ und $\{e_\lambda\}$ die Spektralschar von a_φ. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tau(e_\lambda^\perp) &= \tau(\chi_{(e^s,\infty)}(a_\varphi)) = \tau(\chi_{(1,\infty)}(e^{-s}a_\varphi)) = \tau(\chi_{(1,\infty)}(\vartheta_s(a_\varphi)))\\ &= \tau(\vartheta_s(\chi_{(1,\infty)}(a_\varphi))) = e^{-s}\tau(\chi_{(1,\infty)}(a_\varphi)) = \tfrac{1}{\lambda}\tau(e_1^\perp),\end{aligned}$$

also $\tau(e_\lambda^\perp) = \frac{1}{\lambda}\varphi(\mathbf{1})$, nach dem Lemma. Also gilt

$$\varphi \in \mathcal{M}_* \;\Leftrightarrow\; \varphi(\mathbf{1}) < \infty \;\Leftrightarrow\; \tau(e_\lambda^\perp) \searrow 0 \;\Leftrightarrow\; a_\varphi \in \widetilde{\mathcal{M}},$$

wobei die letzte Äquivalenz nach der Bemerkung zu Lemma 3.2.2 gilt. □

Wir können nun das Hauptresultat dieses Abschnitts beweisen.

Satz 6.3.4. *Es existiert eine lineare Bijektion*

$$\mathcal{M}_* \to L_1(\mathcal{M}), \quad \varphi \mapsto a_\varphi$$

mit den Eigenschaften

$$a_{x.\varphi.y^*} = xa_\varphi y^*, \quad a_{\varphi^*} = (a_\varphi)^*, \quad a_{|\varphi|} = |a_\varphi|,$$

für alle $\varphi \in \mathcal{M}_*$ und $x, y \in \mathcal{M}$.

Beweis. Nach Lemma 6.3.1 und Korollar 6.3.3 ist $\varphi \mapsto a_\varphi$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{M}_*^+$ und $L_1(\mathcal{M})_+ \subseteq \widetilde{\mathcal{N}}$.

Es sei daran erinnert, dass $\widetilde{\mathcal{N}}$ eine *-Algebra ist (siehe Proposition 3.2.5 und Satz 3.2.8). Aus der Bemerkung (1), (2), nach Proposition 6.2.2 folgt, dass die in $\widehat{\mathcal{N}}_+$ gebildeten Operatoren $a_\varphi + a_\varphi$ und $xa_\varphi x^*$ mit denen in $\widetilde{\mathcal{N}}$ übereinstimmen. Daher ist die Abbildung $\varphi \mapsto a_\varphi$ nach Lemma 6.3.1 additiv und positiv homogen auf $\mathcal{M}_*^+$, und es gilt $a_{x.\varphi.x^*} = xa_\varphi x^*$ für $x \in \mathcal{M}$.

Wegen $\operatorname{Spann} \mathcal{M}_*^+ = \mathcal{M}_*$ und $\operatorname{Spann} L_1(\mathcal{M})_+ = L_1(\mathcal{M})$ können wir nun $\varphi \mapsto a_\varphi$ linear zu einer surjektiven Abbildung $\mathcal{M}_* \to L_1(\mathcal{M})$ fortsetzen.

Bevor wir die Injektivität der Fortsetzung $\varphi \mapsto a_\varphi$ zeigen, diskutieren wir deren Eigenschaften. Aus der Linearität folgt $a_{x.\varphi.x^*} = xa_\varphi x^*$ für alle $\varphi \in \mathcal{M}_*$ und $x \in \mathcal{M}$, und aus Polarisation folgt $a_{x.\varphi.y^*} = xa_\varphi y^*$ für $\varphi \in \mathcal{M}_*$ und $x, y \in \mathcal{M}$. Ebenfalls aus der Linearität folgt $a_{\varphi^*} = (a_\varphi)^*$ für $\varphi \in \mathcal{M}_*$.

Um $a_{|\varphi|} = |a_\varphi|$ für $\varphi \in \mathcal{M}_*$ zu zeigen, betrachten wir die Polarzerlegung $\varphi = v.|\varphi|$. Dann gilt $a_\varphi = a_{v.|\varphi|} = va_{|\varphi|}$, wobei v den initialen Raum $\operatorname{Bild} \operatorname{supp} |\varphi| = \operatorname{Bild} \operatorname{supp} a_{|\varphi|} = \operatorname{Bild} a_{|\varphi|}$ besitzt. Damit ist $va_{|\varphi|}$ die Polarzerlegung von a_φ und mithin gilt $|a_\varphi| = a_{|\varphi|}$.

Nun folgt leicht die Injektivität der Fortsetzung $\varphi \mapsto a_\varphi$, denn ist $a_\varphi = 0$, so ist $a_{|\varphi|} = |a_\varphi| = 0$, also $|\varphi| = 0$ und damit $\varphi = 0$. $\square$

Wie bereits angekündigt übertragen wir nun die Norm von $\mathcal{M}_*$ auf $L_1(\mathcal{M})$. Dann ist $L_1(\mathcal{M})$ mit dieser Norm $\|\cdot\|_1$ ein Banachraum.

6.4. Der Banachraum $L_p(\mathcal{M})$

Wir diskutieren zuerst den Fall $p = \infty$.

Lemma 6.4.1. *Wir haben $L_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.*

Damit übertragen wir die Norm von $\mathcal{M}$ auf $L_\infty(\mathcal{M})$.

Beweis. Nach Proposition 5.2.6 ist $\mathcal{M}$ gerade die Fixpunktalgebra von $\{\vartheta_s\}_s$, und daher müssen wir lediglich zeigen, dass $a \in L_\infty(\mathcal{M})$ bereits die Beschränktheit von a impliziert. Es sei $a \in L_\infty(\mathcal{M})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $e_\lambda^\perp := \chi_{(\lambda,\infty)}(|a|)$. Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt dann $\vartheta_s(a) = a$ und daher $\vartheta_s(e_\lambda^\perp) = e_\lambda^\perp$. Damit gilt

$$\tau(e_\lambda^\perp) = \tau(\vartheta_s(e_\lambda^\perp)) = e^{-s}\tau(e_\lambda^\perp),$$

also ist entweder $\tau(e_\lambda^\perp) = 0$ oder $\tau(e_\lambda^\perp) = \infty$. Weil a τ-messbar ist, gibt es $\lambda_0 > 0$ mit $\tau(e_{\lambda_0}^\perp) < \infty$; dann folgt $\tau(e_{\lambda_0}^\perp) = 0$, also $e_{\lambda_0}^\perp = 0$, und damit ist a beschränkt. $\square$

Bemerkung. Im Gegensatz zum vorigen Resultat sind alle Operatoren $a \in L_p(\mathcal{M})$, $a \neq 0$ für $p < \infty$ unbeschränkt (ohne Beweis).

Wir definieren nun eine Norm für den Fall $p < \infty$, hierbei sei an Lemma 6.1.1 erinnert.

Definition. *Es sei $p \in [1, \infty)$. Auf $L_p(\mathcal{M})$ definiere eine „Norm“ $\|\cdot\|_p$ durch*

$$\|a\|_p := (\||a|^p\|_1)^{1/p} \quad (a \in L_p(\mathcal{M})).$$

Alle Normeigenschaften von $\|\cdot\|_p$ folgen leicht, bis auf die Dreiecksungleichung. Diese ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Lemmas, welches weiterhin außerdem einen Teil der Dualität $L_p(\mathcal{M})^* \cong L_q(\mathcal{M})$ (mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) beweist.

Die nächsten Lemmata arbeiten auf den Beweis der Normeigenschaft hin.

Lemma 6.4.2. *Für $p \in [1, \infty)$ und $\varepsilon, \delta > 0$ gilt*

$$N(\varepsilon, \delta) \cap L_p(\mathcal{M}) = \{a \in L_p(\mathcal{M}) \mid \|a\|_p \leq \epsilon\delta^{1/p}\}.$$

Beweis. Es sei $a \in L_p(\mathcal{M})$. Dann ist $|a|^p \in L_1(\mathcal{M})_+$ und damit $|a|^p = h_\varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$. Nun ist nach dem Beweis von Korollar 6.3.3

$$\tau(\chi_{(\varepsilon,\infty)}(|a|)) = \tau(\chi_{(\varepsilon^p,\infty)}(|a|^p)) = \tfrac{1}{e^p}\varphi(\mathbf{1}) = \tfrac{1}{e^p}\||a|^p\|_1 = \tfrac{1}{e^p}\|a\|_p^p.$$

Damit ist $\|a\|_p \leq \varepsilon\delta^{1/p}$ äquivalent zu $\tau(\chi_{(\varepsilon,\infty)}(|a|)) \leq \delta$, also zu $a \in N(\varepsilon, \delta)$. □

Lemma 6.4.3. *Es sei $\mathbb{C}_+^0 := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\alpha > 0\}$ und $h \in \widetilde{\mathcal{N}}_+$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{C}_+^0 \to \widetilde{\mathcal{N}}$, $h \mapsto h^\alpha$ differenzierbar, und zwar gilt*

$$\frac{h^\alpha - h^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} \longrightarrow h^{\alpha_0}\log h \quad \text{für } \alpha \to \alpha_0 \tag{$*$}$$

bezüglich der Topologie auf $\widetilde{\mathcal{N}}$.

Beweis. Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen. Es ist $h^\alpha \in \widetilde{\mathcal{N}}$ für $\operatorname{Re}\alpha > 0$, denn $|h^\alpha| = h^{\operatorname{Re}\alpha}$, und damit gilt $\tau(\chi_{(\lambda^{\operatorname{Re}\alpha},\infty)}(|h^\alpha|)) = \tau(\chi_{(\lambda,\infty)}(h)) \searrow 0$ für $\lambda \to \infty$; die Abbildung ist also definiert. Ferner ist $f(\lambda) := \lambda^{\alpha_0}\log\lambda$ eine auf $[0, \infty)$ stetige Funktion, so dass $h^{\alpha_0}\log h := f(h) \in \overline{\mathcal{N}}$ für alle $\alpha_0 \in \mathbb{C}_+^0$ definiert ist; es gilt sogar $f(h) \in \widetilde{\mathcal{N}}$ (wegen $\tau(\chi_{(\lambda,\infty)}(|f(h)|)) \searrow 0$).

Wir betrachten zunächst den Fall $h \in \mathcal{N}_+$. Dann folgt $(*)$ bezüglich der Normtopologie aus den Eigenschaften des Borel'schen Funktionenkalküls, denn

$$\frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} - \lambda^{\alpha_0}\log\lambda = \frac{e^{\alpha\log\lambda} - e^{\alpha_0\log\lambda}}{\alpha - \alpha_0} - e^{\alpha_0\log\lambda}\log\lambda \longrightarrow 0 \text{ für } \alpha \to \alpha_0$$

gleichmäßig in $\lambda \in (0, \|h\|]$.

Nun sei $h \in \widetilde{\mathcal{N}}_+$ und $\varepsilon, \delta > 0$. Wähle $\lambda > 0$ mit $\tau(\chi_{(\lambda,\infty)}(h)) \leq \delta$, und setze $p := \chi_{[0,\lambda]}(h)$. Dann ist $hp \in \mathcal{N}_+$ und nach dem letzten Absatz gilt

$$\left\|\left(\frac{h^\alpha - h^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} - h^{\alpha_0}\log h\right)p\right\| = \left\|\frac{(hp)^\alpha - (hp)^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} - (hp)^\alpha\log(hp)\right\| \leq \varepsilon$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C}_+^0$ in einer Umgebung von α_0. Also gilt $\frac{h^\alpha - h^{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} - h^{\alpha_0}\log h \in N(\varepsilon, \delta)$ für diese α, und damit ist $(*)$ gezeigt. □

Lemma 6.4.4. *Es sei* $S^0 := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}\lambda < 1\}$ *und* $h, k \in L_1(\mathcal{M})$. *Dann ist die folgende Abbildung definiert und differenzierbar:*

$$S^0 \to L_1(\mathcal{M}), \quad \alpha \mapsto h^\alpha k^{1-\alpha}.$$

Beweis. Es ist $h^\alpha k^{1-\alpha} \in L_1(\mathcal{M})$, denn

$$\vartheta_s(h^\alpha k^{1-\alpha}) = \vartheta_s(h)^\alpha \vartheta_s(k)^{1-\alpha} = e^{-\alpha s} h^\alpha e^{-(1-\alpha)s} k^{1-\alpha} = e^{-s} h^\alpha k^{1-\alpha} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Nach Lemma 6.4.2 stimmen auf $L_1(\mathcal{M})$ die Normtopologie und die von $\widetilde{\mathcal{N}}$ induzierte Topologie überein, weshalb es reicht, die Differenzierbarkeit von $\alpha \mapsto h^\alpha k^{1-\alpha}$ als Abbildung $S^0 \to \widetilde{\mathcal{N}}$ zu zeigen. Nun sind nach dem letzten Lemma die Abbildungen

$$f, g : S^0 \to \widetilde{\mathcal{N}} \quad f(\alpha) := h^\alpha, g(\alpha) := k^{1-\alpha}$$

differenzierbar. Für alle $\alpha_0 \in S^0$ folgt nun

$$\begin{aligned}\frac{f(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha_0)g(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} &= \frac{f(\alpha)(g(\alpha) - g(\alpha_0))}{\alpha - \alpha_0} + \frac{(f(\alpha) - f(\alpha_0))g(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \\ &\longrightarrow f(\alpha_0)\tfrac{d}{d\alpha}g(\alpha_0) + \tfrac{d}{d\alpha}f(\alpha_0)g(\alpha_0)\end{aligned}$$

für $\alpha \to \alpha_0$, so dass $fg : S^0 \to \widetilde{\mathcal{N}}$, $\alpha \mapsto h^\alpha k^{1-\alpha}$ differenzierbar ist. □

Definition. *Gemäß der Bijektion* $L_1(\mathcal{M}) \cong \mathcal{M}_*$, $a \mapsto \varphi_a$, *definieren wir*

$$\operatorname{tr} a = \varphi_a(\mathbf{1}) \quad (a \in L_1(\mathcal{M})).$$

Laut Definition ist tr ein stetiges Funktional auf $L_1(\mathcal{M})$ mit Norm ≤ 1. Es wird sich zeigen, dass tr die Spureigenschaft $\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba)$ erfüllt.

Lemma 6.4.5. *Für* $t \in \mathbb{R}$ *sei*

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{\frac{1}{2}+it} := \{a \in \widetilde{\mathcal{N}} \mid \vartheta_s(a) = e^{-(\frac{1}{2}+it)s} a \text{ für alle } s \in \mathbb{R}\}.$$

Für $a, b \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\frac{1}{2}+it}$ *sind* $b^*a, ab^* \in L_1(\mathcal{M})$, *und es gilt* $\operatorname{tr}(b^*a) = \operatorname{tr}(ab^*)$.

Beweis. Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vartheta_s(b^*a) = \vartheta_s(b)^*\vartheta_s(a) = e^{-(\frac{1}{2}-it)s} b^* e^{-(\frac{1}{2}+it)s} a = e^{-s} b^*a,$$

also ist $b^*a \in L_1(\mathcal{M})$ und analog folgt $ab^* \in L_1(\mathcal{M})$.

Um $\operatorname{tr}(b^*a) = \operatorname{tr}(ab^*)$ zu zeigen, betrachten wir zuerst den Fall $a = b$. Nach Korollar 2.7.2 gilt

$$\chi_{(1,\infty)}(a^*a) = \chi_{(1,\infty)}(|a|) \sim \chi_{(1,\infty)}(|a^*|) = \chi_{(1,\infty)}(aa^*),$$

also folgt nach der Definition von tr und Lemma 6.3.2 $\operatorname{tr}(a^*a) = \tau(\chi_{(1,\infty)}(a^*a)) = \tau(\chi_{(1,\infty)}(aa^*)) = \operatorname{tr}(aa^*)$.

Der allgemeine Fall folgt hieraus mit den Polarisationsformeln

$$b^*a = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (a + i^k b)^*(a + i^k b), \quad ab^* = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k (a + i^k b)(a + i^k b)^*,$$

und der Linearität von tr. □

Proposition 6.4.6. *Es seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sowie $a \in L_p(\mathcal{M})$ und $b \in L_q(\mathcal{M})$. Dann sind $ab, ba \in L_1(\mathcal{M})$ und es gilt*

$$\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(ba).$$

Beweis. Aus Bemerkung (3) vor Lemma 6.1.1 folgt $ab, ba \in L_1(\mathcal{M})$. Im Fall $p = 1$ ist $a = h_\varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{M}_*$, und nach Satz 6.3.4 gilt

$$\operatorname{tr}(h_\varphi b) = \operatorname{tr}(h_{\varphi.b}) = (\varphi.b)(\mathbf{1}) = \varphi(b) = (b.\varphi)(\mathbf{1}) = \operatorname{tr}(h_{b.\varphi}) = \operatorname{tr}(b h_\varphi).$$

Nun seien $p, q \in (1, \infty)$. Wegen der Linearität von tr dürfen wir $a \in L_p(\mathcal{M})_+$ und $b \in L_q(\mathcal{M})_+$ annehmen. Dann ist $a^p, b^p \in L_1(\mathcal{M})$ und nach Lemma 6.4.4 sind die Funktionen

$$F, G : S^0 \to \mathbb{C}, \quad F(\alpha) := \operatorname{tr}(a^{p\alpha} b^{q(1-\alpha)}) \text{ und } G(\alpha) := \operatorname{tr}(b^{q(1-\alpha)} a^{p\alpha})$$

holomorph. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt nun $a^{p(\frac{1}{2}+it)} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\frac{1}{2}+it}$ und $b^{q(\frac{1}{2}+it)} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\frac{1}{2}+it}$, so dass nach dem vorigen Lemma

$$\begin{aligned} F(\tfrac{1}{2} + it) &= \operatorname{tr}(a^{p(\frac{1}{2}+it)} b^{q(\frac{1}{2}-it)}) = \operatorname{tr}(a^{p(\frac{1}{2}+it)} (b^{q(\frac{1}{2}+it)})^*) \\ &= \operatorname{tr}((b^{q(\frac{1}{2}+it)})^* a^{p(\frac{1}{2}+it)}) = \operatorname{tr}(b^{q(\frac{1}{2}-it)} a^{p(\frac{1}{2}+it)}) = G(\tfrac{1}{2} + it) \end{aligned}$$

gilt. Nach dem Identitätssatz folgt $F = G$ und somit $\operatorname{tr}(ab) = F(\frac{1}{p}) = G(\frac{1}{p}) = \operatorname{tr}(ba)$. □

Lemma 6.4.7. *Es seien $h, k \in L_1(\mathcal{M})_+$ mit $\|h\|_1 = \|k\|_1 = 1$. Dann gilt*

$$\|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \le 1 \quad (\alpha \in S^0).$$

Beweis. Wir schreiben $s := \operatorname{Re}\alpha$ und $t := \operatorname{Im}\alpha$. Es ist $0 < s < 1$ und $h^s \in L_{1/s}(\mathcal{M})$ mit $\|h^s\|_{1/s} = 1 = s^{-s}s^s$, so dass $h^s \in N(s^{-s}, s)$ nach Lemma 6.4.2 gilt. Analog folgt $k^{1-s} \in N((1-s)^{-(1-s)}, 1-s)$ und damit

$$h^s k^{1-s} \in N(s^{-s}, s) N((1-s)^{-(1-s)}, 1-s) \subseteq N(s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}, s + (1-s)).$$

Weil h^{it} und k^{-it} unitär sind erkennt man leicht, dass auch

$$h^\alpha k^{1-\alpha} = h^{it} h^s k^{1-s} k^{-it} \in N(s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}, 1)$$

gilt. Wieder nach Lemma 6.4.2 folgt damit $\|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \le s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}$.

Die Funktion $s \mapsto s^{-s}(1-s)^{-(1-s)}$ ist auf $(0, 1)$ beschränkt, denn etwa für $s \longrightarrow 0$ folgt $s \log s \longrightarrow 0$ und damit $s^{-s} = e^{-s \log s} \longrightarrow 1$. Zusammen mit Lemma 6.4.4 folgt, dass die Funktion

$$S^0 \to L_1(\mathcal{M}), \quad \alpha \mapsto h^\alpha k^{(1-\alpha)}$$

beschränkt und differenzierbar ist.

Nach dem Drei-Geraden-Satz für Banachräume[4], angewandt auf die Streifen $\{\alpha \in \mathbb{C} \mid \varepsilon \leq \operatorname{Re}\alpha \leq 1-\varepsilon\}$ für $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, erhalten wir

$$\sup_{\varepsilon \leq \operatorname{Re}\alpha \leq 1-\varepsilon} \|h^\alpha k^{1-\alpha}\|_1 \leq \varepsilon^{-\varepsilon}(1-\varepsilon)^{-(1-\varepsilon)}.$$

Ist nun $\alpha \in S^0$ fest und betrachten wir $\varepsilon \to 0$, so folgt $\varepsilon^{-\varepsilon} \to 1$ und $(1-\varepsilon)^{-(1-\varepsilon)} \to 1$, und damit $\|h^\alpha k^{1-\alpha}\| \leq 1$. □

Satz 6.4.8 (Hölder'sche Ungleichung). *Es seien $p, q \in [1,\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ und $a \in L_p(\mathcal{M})$, $b \in L_q(\mathcal{M})$. Dann gilt*

$$\|ab\|_1 \leq \|a\|_p \|b\|_q.$$

Beweis. Im Fall $p = 1$ ist $a = h_\varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{M}_*$. Es folgt

$$\|h_\varphi b\|_1 = \|h_{\varphi.b}\|_1 = \|\varphi.b\| \leq \|\varphi\|\|b\|_\infty = \|h_\varphi\|_1\|b\|_\infty \quad (b \in L_\infty(\mathcal{M}) = \mathcal{M}).$$

Der Fall $q = 1$ wird analog behandelt.

Nun seien $p, q \in (1,\infty)$ und $\|a\|_p = \|b\|_q = 1$. Ferner seien $a = v|a|$ und $b = |b^*|w$ die Polarzerlegungen von a und b. Dann gilt $|a|^p, |b^*|^q \in L_1(\mathcal{M})$ mit $\||a|^p\|_1 = \||b^*|^q\|_1 = 1$, und es gilt

$$\|ab\|_1 = \|v|a||b^*|w\|_1 \leq \||a||b^*|\|_1 = \||a|^{p/p}|b^*|^{q/q}\|_1 \leq 1,$$

nach dem letzten Lemma. □

Proposition 6.4.9. *Es seien $p, q \in [1,\infty]$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ und $a \in L_p(\mathcal{M})$. Dann gilt*

$$\|a\|_p = \sup\{|tr(ab)| \mid b \in L_q(\mathcal{M}), \|b\|_q \leq 1\}.$$

Beweis. Im Fall $p = 1$ oder $q = 1$ folgt die Aussage wegen $\operatorname{tr}(ch_\varphi) = \operatorname{tr}(h_\varphi c) = \varphi(c)$ für alle $\varphi \in \mathcal{M}_*$ und $c \in \mathcal{M}$; wir nehmen also $p, q \in (1,\infty)$ an. Nach der Hölder'schen Ungleichung folgt $\geq$ und es bleibt $\leq$ zu zeigen. Es sei $\|a\|_p = 1$ angenommen und $b := |a|^{p/q}u^*$ gesetzt, wobei $a = u|a|$ die Polarzerlegung von a sei. Es gilt $b \in L_q(\mathcal{M})$ mit $\|b\|_q = \||a|^{p/q}u^*\|_q = \operatorname{tr}(|a|^p)^{1/q} = 1$, sowie

$$\operatorname{tr}(ab) = \operatorname{tr}(u|a||a|^{p/q}u^*) = \operatorname{tr}(|a|^p) = 1.$$

Somit ist $\leq$ gezeigt. □

Korollar 6.4.10. *Es ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $L_p(\mathcal{M})$, für $p \in [1,\infty]$.*

Beweis. Die Dreiecksungleichung $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$ folgt sofort aus der obigen Proposition. □

[4] Dies ist eine Folgerung des klassischen **Drei-Geraden-Satzes** (siehe z. B. [Wer02], Satz II.4.3): Es sei $f : \overline{S^0} \to \mathbb{C}$ eine stetige, beschränkte Funktion, die auf S^0 holomorph ist, und $\vartheta \in [0,1]$. Dann gilt

$$c_\vartheta \leq c_0^{1-\vartheta} c_1^\vartheta, \quad \text{wobei } c_\vartheta := \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(\vartheta + it)|.$$

Man folgert leicht die analoge Aussage für eine stetige, beschränkte Funktion $F : \overline{S^0} \to E$ mit Werten in einem Banachraum E, die auf S^0 differenzierbar ist. Und zwar wenden wir hierfür den klassischen Drei-Geraden-Satz auf die Funktionen $\varphi \circ f$ für $\varphi \in E^*$ an.

Satz 6.4.11. *Es ist $L_p(\mathcal{M})$ mit der Norm $\|\cdot\|_p$ ein Banachraum für $p \in [1,\infty]$.*

Beweis. Der Fall $p = \infty$ ist klar, es sei also $p < \infty$ angenommen. Nach Lemma 6.4.2 ist die Normtopologie auf $L_p(\mathcal{M})$ gerade die von $\widetilde{\mathcal{N}}$ induzierte Topologie. Nun ist nach Satz 3.2.10 $\widetilde{\mathcal{N}}$ vollständig, so dass lediglich zu zeigen bleibt, dass $L_p(\mathcal{M}) \subseteq \widetilde{\mathcal{N}}$ ein abgeschlossener Teilraum ist. Dies folgt jedoch aus der Definition, denn die ϑ_s sind stetig als *-Automorphismen von $\widetilde{\mathcal{N}}$. □

Bemerkung. Im Fall $p = 2$ ist $L_2(\mathcal{M})$ sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle a, b\rangle_{L_2(\mathcal{M})} := \operatorname{tr}(b^*a) \quad (a, b \in L_2(\mathcal{M})).$$

Schlussbemerkungen

Es gilt, analog zu den klassischen L_p-Räumen, eine Dualität:

Satz 6.4.12. *Es sei $1 \le p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir haben eine isometrische Isomorphie*

$$L_p(\mathcal{M})^* \cong L_q(\mathcal{M}).$$

Zum Beweis. Ein relativ länglicher, aber durchaus interessanter Beweis liefert eine Clarkson'sche Ungleichung für $L_p(\mathcal{M})$, $p \ge 2$, die für diesen Fall impliziert, dass $L_p(\mathcal{M})$ gleichmäßig konvex ist. Hieraus kann die Reflexivität von $L_p(\mathcal{M})$ gefolgert werden. Der Rest folgt nun leicht, da nach Proposition 6.4.9 die Inklusion $L_q(\mathcal{M}) \hookrightarrow L_p(\mathcal{M})^*$ bereits schach*-dicht ist. □

Es folgen einige weitere Schlussbemerkungen.

Bemerkungen. (1) Die $L_p(\mathcal{M})$-Räume hängen modulo Isomorphie nicht von der Wahl des treuen, normalen Zustands φ_0 ab, bezüglich dem das gekreuzte Produkt $\mathcal{N}$ gebildet wird. Der Beweis erfolgt mittels der cozyklischen Radon-Nikodym-Ableitung 4.3.2, siehe [Ter81], p59-62.

(2) Wir diskutieren den Fall, in dem $\mathcal{M}$ bereits eine normale, semifinite, treue Spur τ_0 besitzt. Hier interessieren wir uns für den Zusammenhang des Raumes $L_p(\mathcal{M}, \tau_0)$ aus Abschnitt 3.3 mit dem Haagerup-L_p-Raum $L_p(\mathcal{M})$.

Konstruieren wir das gekreuzte Produkt $\mathcal{N}$ mittels der Spur τ_0, so ist $\sigma_t^{\tau_0} = \mathrm{id}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, und $\mathcal{N}$ wird von den Operatoren $x \otimes 1$ und $1 \otimes l_t$ generiert. Es sei $v \in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}))$ der unitäre Operator, der aus der Fourier-Transformation hervorgeht, und wir betrachten die unitäre Transformation

$$a \mapsto \widehat{a} := (\mathbf{1} \otimes v^*)a(1 \otimes v) \quad (a \in \mathcal{N}).$$

Dann wird $\widehat{\mathcal{N}} := \{\widehat{a} \mid a \in \mathcal{N}\}$ von den Operatoren $x \otimes 1$ und $1 \otimes w_{-p}$ generiert (vgl. Abschnitt 5.3, Anfang), und nach Lemma 5.2.2 gilt

$$\mathcal{N} \cong \widehat{\mathcal{N}} \cong \mathcal{M} \otimes L_\infty(\mathbb{R}).$$

Identifizieren wir $\mathcal{N}$ mit $\mathcal{M} \otimes L_\infty(\mathbb{R})$, so gilt entsprechend für die duale Aktion

$$\vartheta_s(x \otimes f) = x \otimes l_s f.$$

Man kann zeigen, dass $\tau \cong \tau_0 \otimes e^{-s} ds$ für die konstruierte Spur τ auf $\mathcal{N}$ gilt, und das ferner gilt

$$L_p(\mathcal{M}) \cong L_p(\mathcal{M}, \tau_0) \otimes \exp(\cdot/p).$$

(3) Abschließend sei erwähnt, dass es eine weitere Möglichkeit gibt, L_p-Räume zu beliebigen von Neumann-Algebren zu konstruieren. Hierbei setzt man $L_1(\mathcal{M}) := \mathcal{M}_*$ und $L_\infty(\mathcal{M}) := \mathcal{M}$ und definiert die Räume $L_p(\mathcal{M})$ mittels sog. komplexer Interpolation. Diese Methode hat allerdings den Nachteil, dass die Elemente in $L_p(\mathcal{M})$ nicht als Operatoren auf einem Hilbertraum dargestellt sind.

A. Präliminarien

A.1. Notationen

Es seien E, F normierte Räume (über $\mathbb{C}$). Wir setzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(E,F) &:= \text{die stetigen linearen Operatoren von } E \text{ nach } F,\\
E^* &:= \text{der Dualraum } \mathcal{L}(E,\mathbb{C}) \text{ von } E,\\
B_E &:= \text{die abgeschlossene Einheitskugel von } E.
\end{aligned}$$

Es sei $f : A \to B$ eine Funktion zwischen Mengen A und B. Für $C \subseteq B$ schreiben wir oft abkürzend

$$\{f \in C\} := \{x \in A \mid f(x) \in C\}.$$

Es sei X ein topologischer Raum. Wir bezeichnen den Abschluss einer Menge $A \subseteq X$ mit $\overline{A}$, sowie das Innere mit A^0. Ferner sei

$$\begin{aligned}
C(X) &:= \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\},\\
C_0(X) &:= \{f \in C(X) \mid \{|f| \geq \varepsilon\} \text{ kompakt, für alle } \varepsilon > 0\},\\
C_c(X) &:= \{f \in C(X) \mid \operatorname{supp} f := \overline{\{f \neq 0\}} \text{ kompakt}\};
\end{aligned}$$

hierbei können $C_0(X)$ und $C_c(X)$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_X$ ausgestattet werden; ist X kompakt, so ist $C(X) = C_0(X) = C_c(X)$.

Sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maß, dann bezeichne

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mu) &:= \text{die } \mathcal{S}\text{-messbaren Funktionen } f : \Omega \to \mathbb{C},\\
\mathcal{B}_\infty(\mu) &:= \text{die } \mathcal{S}\text{-messbaren, beschränkten Funktionen } f : \Omega \to \mathbb{C},\\
L_1(\mu) &:= \text{die Äquivalenzklassen der } \mu\text{-integrierbaren Funktionen } f : \Omega \to \mathbb{C},\\
L_p(\mu) &:= \text{die Äq.-kl. der Funktionen } f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mit } |f|^p \in L_1(\mu), \quad 1 < p < \infty,\\
L_\infty(\mu) &:= \text{die Äq.-kl. der } \mathcal{S}\text{-messbaren, wesentlich beschr. Funktionen } f : \Omega \to \mathbb{C},
\end{aligned}$$

wobei die $L_p(\mu)$ mit den üblichen Normen ausgestattet werden ($1 \leq p \leq \infty$).

Im Fall $(\Omega, \mathcal{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf der Borel'schen σ-Algebra $\mathcal{B}$ sei, schreiben wir auch $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bzw. $L_p(\mathbb{R})$ statt $\mathcal{B}(\mu)$ bzw. $L_p(\mu)$; anstatt $\mathcal{B}$-messbar (Borel-messbar) sagen wir auch einfach messbar.

A.2. C^*-Algebren

(1) Es sei A eine Algebra über $\mathbb{C}$ mit Eins $\mathbf{1}$. Eine *Involution* auf A ist eine konjugiert-lineare Abbildung $A \to A$, $a \mapsto a^*$, so dass

$$(ab)^* = b^* a^* \quad \text{und} \quad a^{**} = a \quad (a, b \in A);$$

eine Algebra über $\mathbb{C}$ mit Involution heißt **-Algebra*. Eine **-Unteralgebra* $A_0 \subseteq A$ ist eine bzgl. Involution abgeschlossene Unteralgebra (mit Eins).

Eine *C^*-Algebra* A ist eine *-Algebra mit einer Norm $\|\cdot\|$ für die

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \text{und} \quad \|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (a, b \in A)$$

gilt, so dass $(A, \|\cdot\|)$ vollständig ist. Eine *C^*-Unteralgebra* $A_0 \subseteq A$ ist eine normabgeschlossene *-Unteralgebra.

(2) Es seien A und B *-Algebren. Ein *-Homomorphismus ist eine lineare Abbildung $\varphi : A \to B$, so dass

$$\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \ \text{ und } \ \varphi(a^*) = \varphi(a)^* \quad (a, b \in A).$$

Entsprechend werden *-Isomorphismen und *-Automorphismen definiert.

(3) Beispiele für kommutative C^*-Algebren sind (a) $A = \mathbb{C}$, die komplexen Zahlen, mit komplexer Konjugation als Involution, und (b) $A = C(X)$, die stetigen komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffraum X, mit punktweise definierten Operationen und Supremumsnorm.

Ein Beispiel für eine nicht-kommutative C^*-Algebra ist $A = \mathcal{L}(H)$, die linearen Operatoren auf einem komplexen Hilbertraum H (wobei $\dim H > 1$), siehe unten.

(4) Es sei A eine *-Algebra. Es heißt $a \in A$ *selbstadjungiert*, falls $a^* = a$; *unitär*, falls $a^*a = aa^* = \mathbf{1}$; *normal*, falls $a^*a = aa^*$. Es heißt $e \in A$ eine *Projektion*, falls $e = e^* = e^2$. Wir setzen

$$A_{\text{sa}} := \{x \in A \mid x \text{ selbstadjungiert}\}, \quad A_{\text{proj}} := \{e \in A \mid e \text{ Projektion}\}.$$

(5) Es sei A eine C^*-Algebra. Zu $a \in A$ definiere das *Spektrum* durch

$$\operatorname{Sp} a := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda\mathbf{1} - a \text{ nicht invertierbar}\}.$$

Das Spektrum $\operatorname{Sp} a$ ist eine nicht-leere, kompakte Menge in $\mathbb{C}$.

Wir definieren weiterhin den *Spektralradius* $\rho(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Sp} a\}$, dann gilt

$$\rho(a) \leq \|a\|, \quad \rho(a) = \|a\| \text{ für } a \text{ normal}.$$

(6) Es sei A eine kommutative C^*-Algebra und X die Menge aller komplexen Algebra-Homomorphismen $\varphi : A \to \mathbb{C}$. Dann ist jedes $\varphi \in X$ ein *-Homomorphismus und es gilt $\|\varphi\| \leq 1$. Ausgestattet mit der von A^* induzierten schwach*-Topologie (der *Gelfand-Topologie*) ist X ein kompakter Hausdorffraum und die *Gelfand-Transformation*

$$A \to C(X), \quad a \mapsto \widehat{a}, \quad \text{wobei } \ \widehat{a}(\varphi) := \varphi(a) \quad (a \in A, \varphi \in X)$$

ist ein isometrischer *-Isomorphismus, und $\operatorname{Sp} a = \widehat{a}(X)$ für alle $a \in A$.

(7) Es sei A eine C^*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann ist die von a erzeugte C^*-Algebra A_0 (der Abschluss aller Linearkombinationen von $a^m(a^*)^n$, wobei $m, n \geq 0$)

eine kommutative C^*-Unteralgebra $A_0 \subseteq A$ mit $a \in A_0$ und $\operatorname{Sp}_{A_0} a = \operatorname{Sp}_A a$. Via der *-Isomorphie $A_0 \cong C(X)$ von (6) erkennt man leicht

$$\begin{aligned} a \text{ selbstadjungiert} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Sp} a \subseteq \mathbb{R}, \\ a \text{ unitär} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Sp} a \subseteq S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}, \\ a \text{ eine Projektion} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Sp} a \subseteq \{0, 1\}. \end{aligned}$$

(8) In der Situation von (7) ist X homöomorph zu $\operatorname{Sp} a$, und es existiert genau ein isometrischer *-Isomorphismus

$$C(\operatorname{Sp} a) \to A_0,\ g \mapsto g(x), \quad \text{mit } z \mapsto x,$$

wobei $z : \operatorname{Sp} a \to \mathbb{C}$ die Inklusion sei (*stetiger Funktionalkalkül*). Ist $Y \supseteq \operatorname{Sp} a$ und $g \in C(Y)$, so setzen wir $g(x) := (g|_{\operatorname{Sp} a})(x)$.

(9) Es sei A eine C^*-Algebra. Es heißt $a \in A$ *positiv* ($a \geq 0$), falls a selbstadjungiert ist und $\operatorname{Sp} a \subseteq [0, \infty)$ gilt; ferner sei $A_+ := \{a \in A \mid a \geq 0\}$. Es gilt:

- $a, b \in A_+$ impliziert $a + b \in A_+$; auf A_{sa} definiert $a \leq b :\Leftrightarrow b - a \geq 0$ eine partielle Ordnung;
- zu $a \in A_+$ existiert genau ein $b \in A_+$ mit $b^2 = a$, hierfür schreiben wir $a^{1/2} := b$;
- für alle $a \in A$ ist $a^*a \geq 0$; wir setzen $|a| := (a^*a)^{1/2}$;
- für alle $a \in A_{\text{sa}}$ existiert eine Zerlegung $a = a_+ - a_-$ mit $a_+, a_- \in A_+$ und $a_+a_- = a_-a_+ = 0$.

(10) Es seien A und B C^*-Algebren und $\varphi : A \to B$ ein *-Isomorphismus. Dann ist φ normverkleinernd und $\varphi(A)$ ist eine C^*-Algebra. Ist φ injektiv, so ist φ isometrisch.

Die Ausführungen zu (1) bis (9) findet man etwa in [Wer02], Abschnitt IX.3; zu (9) siehe auch [Mur90], Abschnitt 2.2. Zu (10) siehe [Mur90], 2.1.7, 3.1.6 und 3.1.5.

Anmerkung. Im Nichtkommutativen gelten viele Gesetze nicht, die man für intuitiv halten könnte, wie z. B. $0 \leq a \leq b$ impliziert $a^2 \leq b^2$. Betrachte hierfür die C^*-Algebra $M_2(\mathbb{C})$ der 2×2-Matrizen und $e, f \in M_2(\mathbb{C})_{\text{proj}}$,

$$e := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f := \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $e \leq e + f$, aber nicht $e^2 = e \leq (e + f)^2 = e + f + ef + fe$, denn die Matrix

$$f + ef + fe = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischem Polynom $t^2 - 2t - \frac{1}{4} = (t-1)^2 - \frac{5}{4}$ hat einen negativen Eigenwert.

Lemma A.2.1. *Jedes Element einer C^*-Algebra A ist eine Linearkombination von vier unitären Elementen.*

Beweis. Sei $a \in A$ selbstadjungiert und $\|a\| \leq 1$. Dann ist $1 - a^2 \in A_+$ und

$$u := a + i(1-a^2)^{1/2}, \quad v := a - i(1-a^2)^{1/2}$$

sind unitäre Elemente in A mit $a = \frac{1}{2}(u+v)$.

Ist $a \in A$ beliebig, so ist $a = b + ic$ mit $b := \frac{1}{2}(a+a^*)$ und $c := \frac{1}{2i}(a-a^*)$ selbstadjungiert; hieraus folgt die Behauptung. □

A.3. Operatoren auf einem Hilbertraum

(1) Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $\mathcal{L}(H)$ die Menge aller beschränkten, linearen Operatoren auf H. Zu $x \in \mathcal{L}(H)$ existiert genau ein *adjungierter* Operator $x^* \in \mathcal{L}(H)$, so dass

$$\langle x\xi, \eta \rangle = \langle \xi, x^*\eta \rangle \quad (\xi, \eta \in H).$$

Es ist $\mathcal{L}(H)$ mit der Adjunktion als Involution und der Operator-Norm $\|x\| := \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|x\xi\|$ eine C^*-Algebra ([MeV92], 11.11).

(2) Für $\xi_0, \eta_0 \in H$ definiert $\xi \mapsto \langle \xi, \xi_0 \rangle \eta_0$ einen Operator $\xi_0 \otimes \eta_0 \in \mathcal{L}(H)$. Der von diesen Operatoren aufgespannte lineare Teilraum ist der Raum $\mathcal{F}(H)$ der Operatoren mit endlich-dimensionalem Bild, und dessen Abschluss ist der Raum $\mathcal{K}(H)$ der kompakten Operatoren ([MeV92], 16.4).

(3) Eine beschränkte Sesquilinearform ist eine Abbildung $b : H \times H \to \mathbb{C}$, die linear in der ersten und konjugiert-linar in der zweiten Komponente ist, so dass $|b(\xi, \eta)| \leq M\|\xi\|\|\eta\|$ $(\xi, \eta \in H)$. Zu jeder solchen Abbildung b existiert genau ein Operator $x \in \mathcal{L}(H)$ mit $\langle x\xi, \eta \rangle = b(\xi, \eta)$ für $\xi, \eta \in H$ ([MeV92], 11.15).

(4) Für alle $x \in \mathcal{L}(H)$ gilt

$$\operatorname{Kern} x^* = \{\xi \in H \mid 0 = \langle x^*\xi, \eta \rangle = \langle \xi, x\eta \rangle \text{ für alle } \eta \in H\} = (\operatorname{Bild} x)^\perp,$$

wobei $A^\perp$ den Orthogonalraum einer Menge $A \subseteq H$ bezeichne.

Ist $x \in \mathcal{L}(H)$ normal, so gilt $\|x\xi\|^2 = \langle x^*x\xi, \xi \rangle = \langle xx^*\xi, \xi \rangle = \|x^*\xi\|^2$ für alle $\xi \in H$; insbesondere folgt $\operatorname{Kern} x = \operatorname{Kern} x^* = (\operatorname{Bild} x)^\perp$.

(5) Für alle $x \in \mathcal{L}(H)$ haben wir die Polarisations-Identität

$$\langle x\xi, \eta \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \langle x(\xi + i^k\eta), \xi + i^k\eta \rangle \quad (\xi, \eta \in H),$$

wie man durch direktes Nachrechnen bestätigt. Es folgt, dass ein Operator $x \in \mathcal{L}(H)$ durch die Werte $\langle x\xi, \xi \rangle$ $(\xi \in H)$ festgelegt wird.

Lemma A.3.1. *Sei $x \in \mathcal{L}(H)$ normal und $\lambda \in \operatorname{Sp} x$. Dann ist λ ein* approximativer Eigenwert*, d. h. es existiert eine Folge $(\xi_n) \subseteq H$ mit $\|\xi_n\| = 1$, so dass $(x - \lambda\mathbf{1})\xi_n \longrightarrow 0$.*

Beweis. Wir zeigen, dass $x - \lambda\mathbf{1}$ invertierbar ist, falls λ kein approximativer Eigenwert ist. Wir dürfen o. E. $\lambda = 0$ annehmen. Ist 0 kein approximativer Eigenwert von x, so ist

$$\alpha := \inf\{\|x\xi\| \mid \xi \in H, \|\xi\| = 1\} > 0,$$

und damit $\|x\xi\| \geq \alpha\|\xi\|$ $(\xi \in H)$. Man sieht hieraus leicht, dass die Abbildung $x : H \to x(H)$ ein Isomorphismus ist mit $\|x^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$; insbesondere ist $x(H)$ vollständig und somit abgeschlossen in H. Nach (4) ist $(x(H))^\perp = (\operatorname{Bild} x)^\perp = \operatorname{Kern} x = \{0\}$ und somit $x(H) = H$. □

Lemma A.3.2. *Für $x \in \mathcal{L}(H)$ gilt*

$$\begin{aligned} x \text{ selbstadjungiert} \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R} \quad (\xi \in H) \\ x \text{ positiv} \quad &\Leftrightarrow \quad \langle x\xi, \xi\rangle \geq 0 \quad (\xi \in H) \\ x \text{ unitär} \quad &\Leftrightarrow \quad x \text{ surjektive Isometrie} \\ x \text{ Projektion} \quad &\Leftrightarrow \quad x \text{ Orthogonalprojektion auf } x(H). \end{aligned}$$

Beweis. Ist $x \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und $\xi \in H$, so folgt $\langle x\xi, \xi\rangle = \langle \xi, x\xi\rangle = \overline{\langle x\xi, \xi\rangle}$, also $\langle x\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$. Ist umgekehrt $\langle x\xi, \xi\rangle \in \mathbb{R}$ $(\xi \in H)$, so gilt $\langle x\xi, \xi\rangle = \langle x^*\xi, \xi\rangle$ und wegen (5) somit $x = x^*$.

Ist $x \in \mathcal{L}(H)$ positiv, $y := x^{1/2}$ und $\xi \in H$, so folgt $\langle x\xi, \xi\rangle = \langle y^2\xi, \xi\rangle = \langle y\xi, y\xi\rangle \geq 0$. Ist umgekehrt $\langle x\xi, \xi\rangle \geq 0$ $(\xi \in H)$, dann ist x wie schon gezeigt selbstadjungiert, also normal. Sei $\lambda \in \operatorname{Sp} x$, dann existiert nach dem vorigen Lemma eine Folge $(\xi_n) \subseteq H$, $\|\xi_n\| = 1$ mit $(x - \lambda\mathbf{1})\xi_n \longrightarrow 0$; es folgt $\langle x\xi_n, \xi_n\rangle \longrightarrow \lambda$ und somit $\lambda \geq 0$. Also ist $\operatorname{Sp} x \subset [0, \infty)$ und somit x positiv.

Für die nächste Äquivalenz, es gilt $x^*x = \mathbf{1}$ wegen $\|x\xi\|^2 = \langle x^*x\xi, \xi\rangle$ und (5) genau dann, wenn x eine Isometrie ist. In diesem Fall ist x surjektiv genau dann, wenn x invertierbar ist, also wenn auch $xx^* = \mathbf{1}$ gilt.

Auf beiden Seiten der letzten Äquivalenz gilt $x = x^2$. Gilt zusätzlich $x = x^*$, so ist $\langle x\xi, \eta - x\eta\rangle = \langle \xi, x\eta - x^2\eta\rangle = 0$ für alle $\xi, \eta \in H$, d. h. x ist eine Orthogonalprojektion. Ist umgekehrt x eine Orthogonalprojektion und $\xi, \eta \in H$, so gilt $\langle x\xi, \eta\rangle = \langle x\xi, \eta - x\eta + x\eta\rangle = \langle x\xi, x\eta\rangle = \langle x\xi - \xi + \xi, x\eta\rangle = \langle \xi, x\eta\rangle$, folglich ist $x = x^*$. □

Bemerkung. (1) Ist $e \in \mathcal{L}(H)_{\text{proj}}$, dann ist $e^\perp := 1 - e$ gerade die Projektion auf $(\operatorname{Bild} e)^\perp$.

(2) Für $e, f \in \mathcal{L}(H)_{\text{proj}}$ gilt

$$e \leq f \text{ genau dann, wenn } \operatorname{Bild} e \subseteq \operatorname{Bild} f,$$

siehe [Mur90], 2.3.2.

Positive Funktionale

(1) Es sei A eine C^*-Algebra. Ein lineares Funktional $\varphi : A \to \mathbb{C}$ heißt *positiv*, falls $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in A_+$. Dies ist äquivalent dazu, dass φ stetig ist, mit $\varphi(\mathbf{1}) = \|\varphi\|$. Ein positives Funktional mit $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ heißt *Zustand*.

Im Fall $A = \mathcal{L}(H)$ ist für jedes $\xi \in H$ mit $\|\xi\| = 1$ die Abbildung

$$\omega_\xi : \mathcal{L}(H) \to \mathbb{C}, \quad \omega_\xi(x) := \langle x\xi, \xi\rangle$$

ein Zustand, genannt *Vektorzustand*.

(2) Es sei A eine C^*-Algebra und $\varphi : A \to \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Dann definiert

$$A \times A \to \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle_\varphi := \varphi(y^* x)$$

ein Semi-Skalarprodukt. Es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\varphi(y^* x)| \le \varphi(x^* x)^{1/2} \varphi(y^* y)^{1/2} \quad (x, y \in A).$$

(3) Es ist $N_\varphi := \{x \in A \mid \varphi(x^* x) = 0\}$ ein Linksideal und $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$ induziert ein Skalarprodukt auf A/N_φ. Dessen Vervollständigung zum Hilbertraum werde mit H_φ bezeichnet.

(4) Zu $x \in A$ definiert $L_x(y + N_\varphi) := xy + N_\varphi$ eine Abbildung $L_x \in \mathcal{L}(H_\varphi)$ und die Abbildung

$$A \to \mathcal{L}(H_\varphi), \quad x \mapsto L_x$$

ist ein *-Homomorphismus, den wir als *GNS-Darstellung* (Gelfand, Naimark, Segal) von A zum Zustand φ bezeichnen.

Details hierzu findet man in [Wer02], Abschnitt IX.3, Ende.

A.4. Matrixdarstellungen

Bemerkung. Es sei H ein Hilbertraum und I eine Indexmenge. Dann ist

$$l_2(I, H) := \{(\xi_i)_{i \in I} \mid \textstyle\sum_{i \in I} \|\xi_i\|^2 < \infty\}$$

ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle (\xi_i)_i, (\eta_i)_i \rangle := \textstyle\sum_{i \in I} \langle \xi_i, \eta_i \rangle.$$

Der Beweis hierfür wird sehr analog zum Fall $l_2(I) := l_2(I, \mathbb{C})$ geführt (siehe [Wer02], Beispiele I.1(g) und V.1(e)).

Im Fall $I = \{1, \dots, n\}$ ist $l_2(I, H) \cong H \oplus \cdots \oplus H =: H^n$, und allgemein bezeichnen wir $l_2(I, H)$ als direkte Summe und schreiben hierfür $\bigoplus_{i \in I} H$ oder H^I.

Definition. *Wir ordnen einem Operator $X \in \mathcal{L}(H^I)$ eine* Matrix $(x_{jk})_{j,k \in I}$ *mit $x_{jk} \in \mathcal{L}(H)$ folgendermaßen zu: Zu $k \in I$ werden stetige Operatoren definiert durch*

$$v_k : H \to H^I \quad \textit{und} \quad w_k : H^I \to H,$$
$$v_k \xi := (\delta_{ik} \xi)_i, \quad w_k (\xi_i)_i := \xi_k \quad (\xi \in H, (\xi_i)_i \in H^I)$$

(δ ist das Kronecker-Symbol). Wir setzen dann

$$x_{jk} := w_j X v_k \quad (j, k \in I).$$

Im Fall $I = \{1, \ldots, n\}$ ordnen wir also Operatoren $X \in \mathcal{L}(H^n)$ eine $n \times n$-Matrix (x_{jk}) mit Einträgen in $\mathcal{L}(H)$ zu.

Bemerkung. (1) Wir haben $\|x_{jk}\| \leq \|v_j\| \|X\| \|w_k\| = \|X\|$ für alle $j, k \in I$.

(2) Es gilt $v_k^* = w_k$ für alle $k \in I$ und $e_k := v_k w_k \in \mathcal{L}(H^I)_{\mathrm{proj}}$. Ferner gilt $\sum_{k \in I} e_k(\xi_i)_i = (\xi_i)_i$ für alle $(\xi_i)_i \in H^I$.

(3) Für $(\xi_i)_i \in H^I$, $(\eta_j)_j := X(\xi_i)_i$ und $j \in I$ folgt

$$\eta_j = w_j X(\xi_i)_i = w_j X \sum_{k \in I} e_k(\xi_i)_i = \sum_{k \in I} w_j X v_k w_k(\xi_i)_i = \sum_{k \in I} x_{jk} \xi_k.$$

Damit ist $X(\xi_i)_i = (\sum_{k \in I} x_{jk} \xi_k)_j$ und der Operator X ist durch die Matrix (x_{jk}) eindeutig bestimmt.

(4) Ist $X \in \mathcal{L}(H^I)$ und seien (x_{jk}) bzw. (y_{jk}) die Matrixdarstellungen von X bzw. X^*, so ist

$$y_{jk} = x_{kj}^* \quad (j, k \in I);$$

denn $x_{kj}^* = (w_k X v_j)^* = w_j X^* v_k = y_{jk}$.

(5) Sind (x_{jk}), (y_{kl}) und (z_{jl}) die Matrixdarstellungen von $X, Y, XY \in \mathcal{L}(H^I)$, so gilt

$$z_{jl}(\xi_i)_i = \sum_{k \in I} x_{jk} y_{kl}(\xi_i)_i \quad ((\xi_i)_i \in H^I,\ j, l \in I);$$

denn $z_{jl}(\xi_i)_i = w_j XY v_l(\xi_i)_i = w_j X \sum_{k \in I} e_k Y v_l(\xi_i)_i = \sum_{k \in I} w_j X v_k w_k Y v_l(\xi_i)_i = \sum_{k \in I} x_{jk} y_{kl}(\xi_i)_i$. In diesem Fall definieren wir $(x_{jk}) \cdot (y_{kl}) := (z_{jl})$.

Literaturverzeichnis

[Fil96] P. A. Fillmore, *A User's Guide to Operator Algebras*, Wiley & Sons, New York 1996.

[Haa75] U. Haagerup, *Normal weights on W^*-algebras*, J. Functional Analysis **19** (1975), 302-317.

[Haa79a] U. Haagerup, *Operator valued weights in von Neumann algebras I*, J. Functional Analysis **32** (1979), 175-206.

[Haa79b] U. Haagerup, *Operator valued weights in von Neumann algebras II*, J. Functional Analysis **33** (1979), 339-361.

[KaR83] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, vol. I, Academic Press, San Diego 1983.

[KaR86] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, vol. II, Academic Press, San Diego 1986.

[MeV92] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, Braunschweig 1992.

[Mur90] G. J. Murhpy, *C^*-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, San Diego 1990.

[Rud74] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York 1974.

[Sak71] S. Sakai, *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Springer, New York 1971.

[Wer02] D. Werner, *Funktionalanalysis*, 4. Auflage, Springer, Berlin 2002.

[Tak79] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer, New York 1979.

[Tak03] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II*, Springer, New York 2003.

[Ter81] M. Terp, *L^p spaces associated with von Neumann algebras*, Preprint, University of Copenhagen 1981.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen benutzt habe.